

文章编号: 0258-1825(2021)01-0168-09

高阶气体动理学格式在湍流数值模拟中的应用

曹贵瑜¹, 潘亮², 徐昆^{3,*}

(1. 南方科技大学 前沿与交叉科学研究院, 深圳 518055;

2. 北京师范大学 数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875;

3. 香港科技大学 数学系, 香港)

摘要: 本文回顾了高阶气体动理学格式在湍流数值模拟中的应用。与传统的 Riemann 求解器相比, 气体动理学格式可以提供时空耦合的演化过程, 这对发展高精度格式十分重要。因此, 基于两步四阶时间离散和高精度 WENO 重构, 发展了具有四阶时间精度的气体动理学格式。该格式有更高的数值精度和稳定性, 并且具有更好的处理复杂流动问题的能力。目前, 两步四阶格式已经成功地应用到低雷诺数湍流直接数值模拟和高雷诺数工程湍流 RANS 模拟中, 包括低速槽道湍流、超声速均匀各向同性衰减湍流、二维亚声速翼型湍流和三维跨声速翼身湍流等。数值结果表明该格式对湍流直接数值模拟和湍流 RANS 模拟具有高数值精度和高数值稳定性。下一步将利用高阶气体动理学格式研究更具有挑战性的可压缩湍流问题, 例如超声速湍流边界层和激波边界层相互作用等。

关键词: 高阶气体动理学格式; 可压缩湍流; 直接数值模拟; RANS 模拟

中图分类号: O357.5

文献标识码: A

doi: 10.7638/kqdlxxb-2020.0156

High-order gas-kinetic scheme for numerical simulation of turbulence

CAO Guiyu¹, PAN Liang², XU Kun^{3,*}

(1. *Academy for Advanced Interdisciplinary Studies, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China;*

2. *Laboratory of Mathematics and Complex Systems, School of Mathematical Sciences,*

Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

3. *Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China)*

Abstract: We review the application of high-order gas-kinetic scheme (HGKS) in the numerical simulations of turbulence. HGKS was developed based on the two-stage fourth-order temporal discretization and high-order weighted essentially non-oscillation (WENO) reconstruction. Compared with the classical Riemann solvers, the high-order temporal evolution process, which is extremely helpful in the design of robust, accurate, and efficient higher-order schemes, can be used to construct a spatial-temporal coupled gas-kinetic flux solver. Currently, HGKS has been successfully applied in the direct numerical simulations and Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) simulations of turbulence, including low-speed turbulent channel flows, the decaying supersonic isotropic turbulence, the subsonic NACA0012 airfoil turbulence, and the transonic ARA M100 wing-body turbulence. The numerical results show that HGKS has the high accuracy and outstanding robustness for turbulence simulations. In summary, the HGKS provides a powerful computational tool for studying turbulent flows, especially for compressible turbulence. In the future, more challenging studies will be conducted, including the supersonic turbulent boundary layers and the shock-boundary layer interaction.

Keywords: high-order gas-kinetic scheme; compressible turbulent flows; direct numerical simulation; RANS simulation

收稿日期: 2020-08-28; 修订日期: 2020-11-09

基金项目: 国家自然科学基金(91852114, 11772281, 11701038); 国家数值风洞工程(NNW)

作者简介: 曹贵瑜(1994-), 男, 河南信阳人, 博士, 研究方向: 气体动理学格式, 湍流模拟和建模. E-mail: caogy@sustech.edu.cn

通信作者: 徐昆*(1966-), 教授, 研究方向: 计算流体力学高精度格式, 稀薄气体动理学, 输运问题的多尺度建模等. E-mail: makxu@ust.hk

引用格式: 曹贵瑜, 潘亮, 徐昆. 高阶气体动理学格式在湍流数值模拟中的应用[J]. 空气动力学学报, 2021, 39(1): 168-176.

CAO G Y, PAN L, XU K. High-order gas-kinetic scheme for numerical simulation of turbulence[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2021, 39(1): 168-176. doi: 10.7638/kqdlxxb-2020.0156

0 引言

湍流在自然现象和工程应用中无处不在^[1], 湍流问题的研究对于航空、航天、天气预报等领域的国家战略需求和学科发展具有重要意义。目前, 难以采用理论解析方法直接研究湍流问题, 因此通常需要借助实验手段和数值模拟进行研究。

随着数值计算方法和超级计算机的发展, 直接数值模拟^[2-4] (Direct Numerical Simulation, DNS) 逐渐成为研究湍流机理的重要手段。对于不可压缩湍流的直接数值模拟, 谱方法^[3] (Spectral Method)、伪谱法^[5] (Pseudo-Spectral Method) 以及格子玻尔兹曼方法^[6] (Lattice Boltzmann Method, LBM) 得到了充分的发展。但是, 以上方法都不能应用于带间断的可压缩湍流模拟。目前, 高阶有限差分法^[7-8] 被广泛应用于可压缩湍流的直接数值模拟, 但由于其数值不稳定性, 仍难以适用于超声速湍流马赫数流动。为了在间断区域避免非物理振荡、光滑流动区域保持高精度, Wang 等结合 WENO 重构和紧致有限差分格式发展了高精度混合格式^[9], 并成功应用于超声速湍流马赫数的各向同性湍流直接数值模拟中。鉴于有限体积格式的物理守恒性, 且能适用于复杂网格和复杂几何外形, 二阶有限体积格式被广泛应用于可压缩工程湍流的计算中^[10]。但是, 对可压缩湍流的直接数值模拟却鲜有报道。在可压缩湍流场中通常包含激波、边界层、涡以及它们之间的相互作用等复杂的流动结构。二阶精度的数值方法具有较大的数值耗散和数值色散, 难以捕捉精细的流场结构。近年来, 高阶有限体积格式逐渐兴起, 克服了二阶格式的精度不足问题, 逐渐成为可压缩湍流直接数值模拟的重要研究工具。

在过去的三十年里, 气体动力学格式^[11-12] (Gas-Kinetic Scheme, GKS) 得到了系统性的发展, 目前已成功应用于从低速到高超声速的全速域流动问题的数值模拟。在有限体积格式的框架下, 基于 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 方程^[13] 的积分解直接构造网格界面上的分布函数, 求矩得到相应的数值通量进而更新下一时刻网格单元内的宏观守恒量。相比于传统的 Riemann 求解器, 可以同时考虑从自由分子流到连续流的多尺度演化过程, 不仅能准确给出流场光滑区域的解, 而且能在间断区域很好地捕捉激波。基于 Chanman-Enskog (C-E) 展开, 可以同时处理无黏和黏性问题, 避免额外的黏性项离散。此外, 气体动力学格式是真正的多维格式, 可以将切向信息包含在数值通量中, 这对于三维流动和间断流动十分重要。近年来, 高阶精度气体动力学格式 (High-

Order Gas-Kinetic Scheme, HGKS) 发展也极为迅速。基于 WENO 空间重构^[14-15] 和速度分布函数高阶展开, 发展了单步三阶的气体动力学格式^[16-17]。该格式可避免使用传统高精度格式中界面上通量的 Gauss 积分和 Runge-Kutta 时间离散。但是, 高阶分布函数的形式十分复杂, 给发展更高阶数值格式和三维实战编程带来巨大的困难。相比于时间空间解耦的 Riemann 求解器, 时空耦合的气体动力学求解器可以提供通量的时间导数。基于两步四阶时间离散和高阶精度空间重构^[18], 我们发展了具有四阶时间精度的气体动力学格式^[19]。与原有的单步高阶气体动力学方法相比, 两步四阶时间离散方法仅需要二阶 GKS 通量, 通量形式得到大大简化, 大大降低计算量。目前, 结构网格和非结构网格上的两步四阶气体动力学格式都得到了充分发展, 并对无黏流和层流的标准算例都进行了验证^[20-21]。该格式不仅具有更高的数值精度和更好的稳定性, 而且有处理复杂流动问题的能力。

近几年, GKS 也不断被国内外研究者应用于湍流的数值模拟。对于低雷诺数湍流问题, 二阶 GKS 和基于 WENO 重构的空间高分辨率 GKS 已被用作直接数值模拟工具^[22-23]。对于高雷诺数工程湍流问题, 通过适当地给定 BGK 方程湍流弛豫时间^[24] 能引入湍流黏性, 可以将气体动力学格式与涡黏湍流模式耦合, 实现不可解网格上 RANS 模拟。目前, 耦合各类 RANS 模型、LES 模型和混合湍流模型^[25-30] 的二阶 GKS 和高分辨率 GKS 已被国内外多个课题组成功应用于高雷诺数工程湍流问题的计算中。考虑到湍流数值模拟对空间和时间都要求高分辨率, 例如直接数值模拟需要解析 Kolmogorov 时间尺度和空间尺度上的所有湍流结构, 将高精度高数值稳定性的两步四阶 HGKS 推广到湍流直接数值模拟和 RANS 计算中十分必要。鉴于此, 本文回顾 HGKS 在湍流直接数值模拟和 RANS 模拟中的应用。

1 高阶气体动力学格式

对于有限体积方法, 关键过程是通过数值通量更新每个控制体内的守恒变量。GKS 的数值通量是基于 BGK 方程的积分解。无外力场的三维 BGK 方程为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{g - f}{\tau} \quad (1)$$

式(1)中, f 是气体分子分布函数; g 为 f 对应的平衡态分布函数; u_i 为分子速度; x_i 为空间位置; t 为时间; $\tau = \frac{\mu}{p}$ 为分子的弛豫时间, 其中 μ 为气体分子黏性

系数, p 为压强。 f 和 g 是分子速度、空间位置、时间和内部自由度的函数。Maxwell 平衡态分布函数 g 为:

$$g = \rho \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{N+3}{2}} e^{-\lambda((u_i - U_i)^2 + \xi^2)} \quad (2)$$

式(2)中, ρ 为气体密度; U_i 为气体宏观速度; $\lambda = m_0 / (2k_B T)$, m_0 、 k_B 、 T 分别为分子质量、玻尔兹曼常数和气体温度。 $\xi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2$, N 代表分子内部自由度数目。分子比热比和内部自由度的关系为 $\gamma = (N + 5) / (N + 3)$, 对于双原子分子 $N = 2$, 对于单原子分子 $N = 0$ 。分子碰撞过程中, 总质量、动量和能量守恒, 相容性条件为:

$$\int \frac{g - f}{\tau} \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\Xi} = 0 \quad (3)$$

式中碰撞不变量矢量

$$\boldsymbol{\psi} = (1, u, v, w, \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2))^T$$

相空间微元为 $d\boldsymbol{\Xi} = du dv dw d\xi_1 \dots d\xi_N$ 。在连续流区域, 对 BGK 方程做 C-E 展开,

$$f = g - \tau D_u g + \tau D_u (\tau D_u g) + \dots \quad (4)$$

式中 $D_u = \partial / \partial t + u_i \partial / \partial x_i$ 。根据气体动理论, 零阶展开 $f = g$ 对应推导 Euler 方程; 一阶展开 $f = g - \tau D_u g$ 对应推导 NS 方程。这就是 BGK 方程求解 NS 方程的基础。GKS 就是通过求解 BGK 方程式(1)达到求解 NS 方程的目的。

BGK 方程对碰撞不变量 $\boldsymbol{\psi}$ 求矩, 并在有限控制体上离散:

$$\frac{d(Q_{ijk})}{dt} = \mathcal{L}(Q_{ijk}) \quad (5)$$

式(5)中, Q 为宏观守恒量, 即质量、动量和能量。空间离散算子 \mathcal{L} 为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Q_{ijk}) = & - \frac{1}{|\Omega_{ijk}|} \left[\int_{y_j \times z_k} (\mathbf{F}_{i+1/2, j, k} - \mathbf{F}_{i-1/2, j, k}) dy dz \right. \\ & + \int_{x_i \times z_k} (\mathbf{G}_{i, j+1/2, k} - \mathbf{G}_{i, j-1/2, k}) dx dz \\ & \left. + \int_{x_i \times y_j} (\mathbf{H}_{i, j, k+1/2} - \mathbf{H}_{i, j, k-1/2}) dx dy \right] \quad (6) \end{aligned}$$

式中, $|\Omega_{ijk}|$ 为有限控制体体积。以 x 方向上数值通量为例,

$$\begin{aligned} & \int_{y_j \times z_k} \mathbf{F}_{i+1/2, j, k} dy dz = \\ & \sum_{m, n=1}^2 \omega_{mn} \int \boldsymbol{\psi} u f(\mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\Xi} \Delta y \Delta z \quad (7) \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n} = (x_{i+1/2}, y_{j_m}, z_{k_n})^T$, (y_{j_m}, z_{k_n}) 是在界面 $y_j \times z_k$ 上的高斯点坐标, ω_{mn} 是高斯点权重。对于 HGKS, 核心任务就是获得界面高斯点上

的分布函数 $f(\mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})$, 进而通过取矩求得界面通量以更新下一时刻单元内的宏观守恒量。BGK 方程局部形式解提供了界面上的分布函数:

$$f(\mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) =$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^t g(\mathbf{x}', t', \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) e^{-(t-t')/\tau} dt' + e^{-t/\tau} f_0(-\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \quad (8)$$

式中: $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n} - \mathbf{u}(t - t')$ 是分子运动轨迹, f_0 是界面初始速度分布函数, g 是界面上沿分子运动轨迹对应的平衡态分布函数。可以看到, 这个积分解包含了时间和空间的所有信息。经过简单计算, 界面分布函数显式表达为:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{i+1/2, j_m, k_n}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = & (1 - e^{-t/\tau}) g_0 + \\ & [(t + \tau) e^{-t/\tau} - \tau] (\bar{a}u + \bar{b}v + \bar{c}w) g_0 + \\ & (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \bar{A} g_0 + \\ & e^{-t/\tau} g_l [1 - (\tau + t)(a_l u + b_l v + c_l w) - \tau A^l] H(u) + \\ & e^{-t/\tau} g_r [1 - (\tau + t)(a_r u + b_r v + c_r w) - \\ & \tau A^r] (1 - H(u)) \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $H(\dots)$ 为 Heaviside 函数, g_l 和 g_r 对应界面两侧的初始平衡态分布函数, g_0 是界面上初始平衡态分布。 g_0 通过如下求得。

$$Q_0 = \int \boldsymbol{\psi} g_0 d\boldsymbol{\Xi} = \int_{u>0} \boldsymbol{\psi} g_l d\boldsymbol{\Xi} + \int_{u<0} \boldsymbol{\psi} g_r d\boldsymbol{\Xi} \quad (10)$$

系数 \bar{a} 、 \bar{b} 、 \dots 、 A^r 对应分布函数的空间和时间导数。上述系数可通过宏观守恒量空间导数和相容性条件确定,

$$\begin{aligned} \langle a_k \rangle = \frac{\partial Q_k}{\partial x}, \langle b_k \rangle = \frac{\partial Q_k}{\partial y}, \langle c_k \rangle = \frac{\partial Q_k}{\partial z} \\ \langle a_k u + b_k v + c_k w + A^k \rangle = 0 \\ \langle \bar{a} \rangle = \frac{\partial Q_0}{\partial x}, \langle \bar{b} \rangle = \frac{\partial Q_0}{\partial y}, \langle \bar{c} \rangle = \frac{\partial Q_0}{\partial z} \\ \langle \bar{a}u + \bar{b}v + \bar{c}w + \bar{A} \rangle = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

上式中 $k = l, r$, $\langle \dots \rangle$ 是对平衡态 g 取矩 $\langle \dots \rangle = \int g(\dots) \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\Xi}$ 。详细计算过程和具体参数定义可参考文献[11-12]。

为了获得时空上的高阶精度, 高阶有限体积格式需要高阶空间重构和多步时间离散。基于高精度空间重构, 可以完全确定界面上的分布函数如式(11), 对其求矩可以得到界面上时空耦合的数值通量。为了获得高阶空间精度, 在结构网格的计算中, 采用经典的五阶 WENO 重构, 具体细节见参考文献[14-15]。对于二维和三维问题, 采用一维一维重构方式, 来获得界面高斯点值和多维空间梯度值, 进而获得时空耦合的数值通量。为获得时间高阶精度, 基于守恒律方程的 Lax-Wendroff 形求解器, Li 等发展

了两步四阶的时间离散方法^[18-19]。对于时空耦合的演化过程,可以利用数值通量和数值通量的时间导数值实现高阶时间精度。对于半离散有限体积格式式(5),可以采用以下的两步格式进行离散:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{L}(\mathbf{Q}^n) + \frac{1}{8}\Delta t^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{Q}^n) \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{Q}^n) + \frac{1}{6}\Delta t^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{Q}^n) + 2 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{Q}^*) \right] \quad (13)$$

其中 \mathbf{Q}^* 为 $t^* = t_n + \Delta t/2$ 时刻的守恒量。可以证明,由式(12)和式(13)给出的 \mathbf{Q}^{n+1} 具有四阶时间精度。和四阶 Runge-Kutta 方法相比,仅需要一个中间步就可实现四阶精度,提高了数值格式的计算效率^[20]。更重要的是,两步四阶格式有着和二阶格式相当的数值稳定性。至此,基于二阶 GKS 通量,五阶 WENO 空间重构和两步时间离散的两步四阶 HGKS 简述完毕。

2 数值算例

本节中,选取经典的无黏算例、层流算例、低雷诺数湍流直接数值模拟算例和高雷诺数工程湍流 RANS 模拟算例,来验证 HGKS 计算复杂流动问题的能力。

2.1 Titarev-Toro 问题

第一个算例是 Titarev-Toro 问题^[31],初值条件如下:

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (1.515, 0.523, 1.805), & -5 < x \leq -4.5 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & -4.5 < x < 5 \end{cases}$$

这个算例描述激波和 高频振荡波的相互作用。左边界采用无反射边界条件,右边界给定固定的初值波形。采用 1000 个均匀网格进行计算,并基于两步四阶、两步五阶、三步五阶气体动力学格式和 WENO 重构测试该算例^[20]。在图 1 中给出 Titarev-Toro 问题在 $t=1.8$ 时刻的数值解和精确解。相比与传统的基于 Runge-Kutta 时间离散和 Riemann 求解器的数值格式相比, HGKS 能很好地捕捉流场中的高频波。这也证明了时间空间耦合的数值通量对于高阶格式的重要性。

2.2 双马赫反射问题

双马赫反射问题是可压缩无黏流动的经典算例^[32]。该算例的计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ 。初始时刻 $x=1/6$ 处有一道与 x 轴呈 60° 的马赫数为 10 的激波,激波前后的初值条件如下:

$$(\rho, U, V, p) = (8, 4.125\sqrt{3}, -4.125, 116.5)$$

$$(\rho, U, V, p) = (1.4, 0, 0, 1)$$

从 $x=1/6$ 开始壁面上采用反射边条件,其余部分的下边界和左侧边界一样采用来流条件,右侧边界采用出口条件,并根据激波的移动位置给出上边界的边界条件。图 2 中给出 WENO-Z 格式采用 1440×480 均匀网格时的局部密度分布。数值结果表明 HGKS 有很好的健壮性,并且能够很好地分辨剪切层的不稳定性。

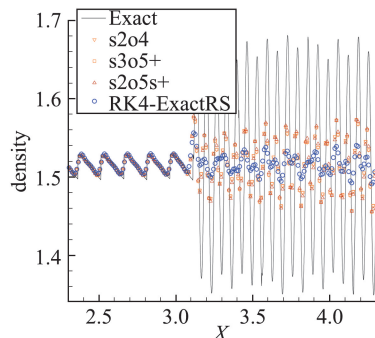


图 1 Titarev-Toro 问题, $t=5$ 的密度数值解和精确解^[20]
Fig.1 The exact and numerical solutions of density for the Titarev-Toro problem^[20] at $t=5$

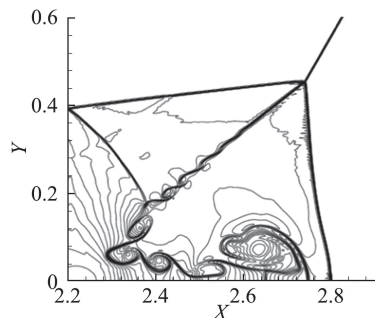


图 2 双马赫反射问题, $t=0.2$ 的数值解^[19]
Fig.2 The numerical solution of density for the double Mach problem^[19] at $t=0.2$

2.3 平板边界层问题

二维平板边界层问题是低速黏性流的经典算例。算例中,来流马赫数 $Ma=0.1$,雷诺数 $Re=1 \times 10^5$ 。壁面上采用无滑移条件,平板之前采用对称条件,其它边界根据 Riemann 不变量给定无反射条件。网格数为 80×40 的非均匀网格。图 3 中给出无量

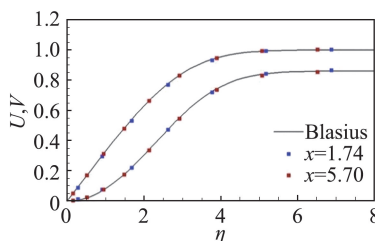


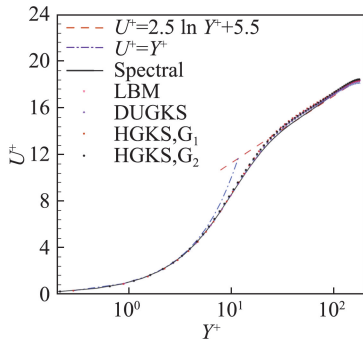
图 3 平板边界层问题,无量纲的 U 和 V , 数值结果和 Blasius 参考解^[19]
Fig.3 Profiles of U and V at different streamwise locations in a laminar boundary layer. Symbols and lines respectively represent the numerical and the Blasius solutions^[19]

纲的 U 和 V , 数值结果和 Blasius 参考解吻合得很好。HGKS 仅用五个网格就能解析边界层速度型。

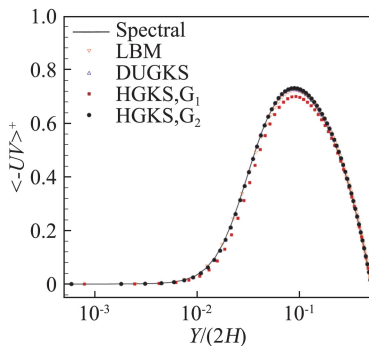
2.4 低速槽道湍流

槽道湍流是研究壁湍流的典型算例。低速槽道湍流计算条件: 马赫数 $Ma = 0.1$, 壁面摩擦雷诺数 $Re_\tau = 180$ 。计算域为 $[0, 2\pi] \times [-1, 1] \times [0, \pi]$, G_1 和 G_2 两套计算网格分别为 96^3 和 128^3 。初始速度场采用泊肃叶理论解叠加幅值为当地速度 10% 的白噪声随机场。通过外加质量力驱动流动, 保证流量为常数。流向和展向给定为周期边界条件, 法向壁面为等温壁。

图 4(a) 中给出了归一化的流向平均速度分布。其中, 作为参考解的谱方法计算网格为 $129 \times 192 \times 160$ 。LBM 作为模拟不可压缩流动流行的介观方法, 其计算网格为 $200 \times 400 \times 200$, DUGKS 则采用 128^3 计算网格^[33]。可以看出 HGKS、LBM、DUGKS 和参考解谱方法^[2] 计算结果都符合得很好。图 4(b) 显示了平均雷诺剪切应力曲线。与谱方法结果相比, G_2 网格上 HGKS 和 DUGKS 结果明显优于 LBM 结果, 尤其是在近壁区域。



(a) 平均流向速度



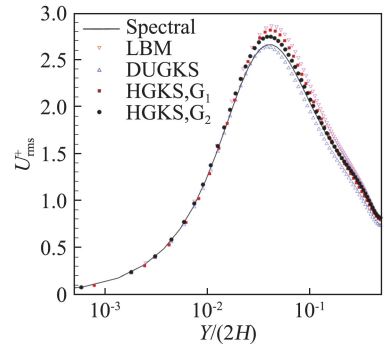
(b) 平均雷诺应力

图 4 低速槽道湍流 HGKS 的计算结果与 LBM、DUGKS、谱方法的比较^[34]

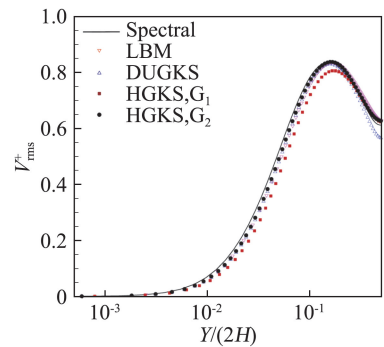
Fig.4 Wall-normal profiles of the mean velocity and Reynolds stress in a low-speed turbulent channel flow^[34]

图 5 给出了用壁面摩擦速度无量纲化的三个方向的脉动速度均方根值。由图可见, 流向速度脉动峰

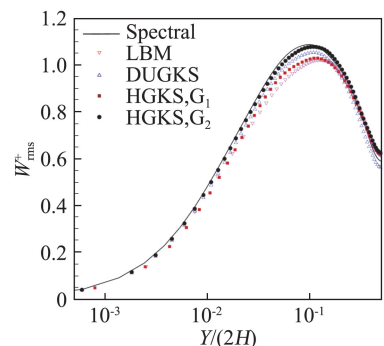
值明显大于另外两个方向的脉动, 且在槽道中心区域湍流脉动趋于各向同性。从图 5 还可以看出, LBM 在近中心线区域表现较好而在近壁区欠佳, DUGKS 在近壁区域表现较好而在近中心线区域欠佳。HGKS 在近壁区域和近中心线区域都与谱方法结果更接近, 优于二阶 LBM 和 DUGKS。此外, 与 LBM 相比, HGKS 结果是在较大计算域的粗网格分辨率获得的。由于 LBM 需要等距网格, 因此网格被限制为一个极小的值以求解黏性底层, 即在相同尺寸的计算域中, LBM 所需的网格数将远超 HGKS。



(a) 流向脉动速度均方根



(b) 法向脉动速度均方根



(c) 展向脉动速度均方根

图 5 低速槽道湍流 HGKS 的计算结果与 LBM、DUGKS、谱方法的比较^[34]

Fig.5 Wall-normal profiles of the root-mean-square of the streamwise, vertical, and spanwise velocities in a low-speed turbulent channel flow^[34]

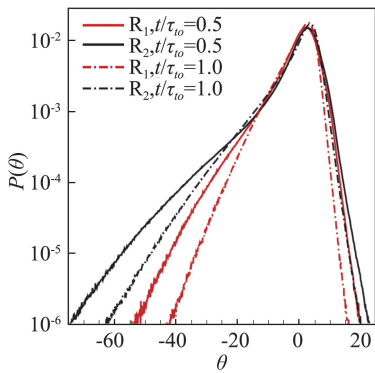
2.5 超声速均匀各向同性衰减湍流

可压缩均匀各向同性衰减湍流常用来检验湍流直接数值模拟中数值格式的鲁棒性。算例 R_1 和 R_2 的初始泰勒微尺度雷诺数分别为 $Re_\lambda = 72$ 和 $Re_\lambda = 120$, 初始湍流马赫数均为 $Ma_t = 2.0$, 动力黏性系数按幂律指数为 0.76 给出。计算域为 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, R_1 计算网格为 384^3 , R_2 计算网格为 512^3 , HGKS 网格的分辨率和时间步长以参考准则^[35] 设定。初始速度脉动场按无散条件给定, 能谱为:

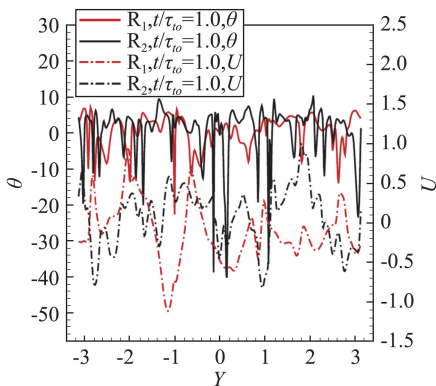
$$E(\kappa) = A_0 \kappa^4 \exp(-2\kappa^2/\kappa_0^2) \quad (14)$$

式中, $A_0 = 0.00013$ 确定初始湍动能, κ 是波数, $\kappa_0 = 8$ 确定能谱峰值。密度和压力场为均匀分布。三个方向均采用周期边界条件。

图 6(a) 给出了无量纲时间 $t/\tau_{io} = 0.5$ 和 $t/\tau_{io} = 1.0$ (τ_{io} 为大涡翻转时间) 速度场胀量 θ 概率密度分布函数。所有胀量 PDF 都显示出负尾巴, 这是由激波结构导致的可压缩各向同性湍流中最显著的流动结



(a) 速度场胀量 θ 概率密度分布函数



(b) 胀量 θ 和 x 方向速度分量在 $x=0$ 和 $z=0$ 截面分布

图 6 超声速各向同性衰减湍流在无量纲 $t/\tau_{io} = 0.5$ 和 $t/\tau_{io} = 1.0$ 时间, (a) 速度场胀量 θ 概率密度分布函数, (b) 胀量 θ 和 x 方向速度分量在 $x=0$ 和 $z=0$ 截面分布^[34]

Fig.6 Numerical solutions in a supersonic decaying isotropic turbulence at $t/\tau_{io} = 0.5$ and $t/\tau_{io} = 1.0$. (a) The probability density function (PDF) of dilation θ ; (b) Instantaneous streamwise velocity U (dashed lines) and dilation θ (solid lines) along $x=0$ and $z=0$ ^[34]

构。图 6(b) 给出了无量纲时间 $t/\tau_{io} = 0.5$ 和 $t/\tau_{io} = 1.0$ 的胀量和 x 方向速度分量在 $x=0$ 和 $z=0$ 截面分布。截面预示, 较强的可压缩区域和高膨胀区域频繁且随机出现在湍流场中。为了更直观地显示流场结构, 图 7 给出了无量纲时刻 $t/\tau_{io} = 0.5$ 时 $\theta/\langle\theta\rangle^*$ 云图。其中 $\langle\theta\rangle^*$ 是流场胀量均方根。通常, $\theta/\langle\theta\rangle^* \leq -3$ 的强压缩区域被识别为小激波^[36]。这些随机分布的小激波和高膨胀区域导致流场中的剧烈变化的空间梯度和时间梯度, 给高阶数值格式稳定性带来巨大的挑战。很少有高阶数值格式能模拟超声速湍流马赫数的均匀各向同性衰减湍流。HGKS 在高达 $Ma_t = 2.0$ 的高湍流马赫数的 DNS 成功应用证实了 HGKS 优秀的鲁棒性, 为高可压缩湍流提供了有力的计算工具。

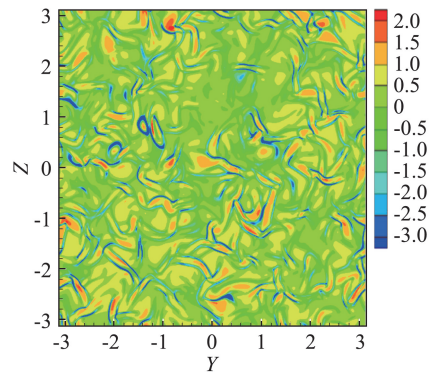


图 7 超声速各向同性衰减湍流算例 R_1 在无量纲 $t/\tau_{io} = 0.5$ 时间 $\theta/\langle\theta\rangle^*$ 云图^[34]

Fig.7 Contours of normalized dilation $\theta/\langle\theta\rangle^*$ at $x=0$ and $t/\tau_{io} = 0.5$ in a supersonic decaying isotropic turbulence^[34]

2.6 亚声速 NACA0012 翼型湍流

亚声速 NACA0012 翼型湍流是 NASA 湍流模拟网站^[37] 提供的标准湍流模型验证算例。自由来流条件如下: 马赫数 $Ma = 0.15$, 雷诺数 $Re = 3.0 \times 10^6$, 翼型攻角 15° , 弦长 $c = 1.0$, 升力系数和阻力系数计算中参考面积为 1.0。计算域和边界条件与 NASA 网站保持一致, 其中 G_3 和 G_4 两套计算网格设置分别为 225×65 和 897×257 。粗网格 G_3 被应用于隐式 HGKS (Implicit HGKS, IHGKS) 和二阶隐式 GKS (Implicit GKS, IGKS) 模拟, 参考解为 CFL3D 在密网格 G_4 计算结果。对于 RANS 计算, 式(1)中分子弛豫时间 τ 调整为:

$$\tau + \tau_t = \frac{\mu + \mu_t}{\rho}$$

其中 μ_t 为湍流模型^[30] 提供的湍流黏性系数。本文耦合 $k-\omega$ SST 湍流模型求得湍流黏性系数, 进而调整 BGK 方程中的湍流弛豫时间, 时间离散采用 LUSGS 隐式算法。

图 8 中显示了 NACA0012 翼型周围的压力系数分布和翼型上壁面摩擦系数分布。粗网格 G_3 上, 相比于二阶隐式 GKS 的结果, 隐式 HGKS 的压力系数和摩擦系数与实验数据^[38] 和 CFL3D 在密网格 G_4 上参考解更加接近。阻力系数 C_D 对翼型周围的压力分布和壁面摩擦力分布非常敏感。如表 1 所示, 隐式 HGKS 的升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 在粗网格 G_3 上求解结果非常接近密网格 G_4 上 CFL3D 的参考解。特别是粗网格 G_3 上隐式 HGKS 的 C_D 和参考解的差异在 3 个阻力数(0.0001)之内, 达到了工程湍流模拟的要求。对于二阶隐式 GKS, 升力系数是可以接受的, 而它过高地预测了阻力系数达到 40 个阻力数。该算例证实了隐式 HGKS 高精度 RANS 模拟湍流场的能力。

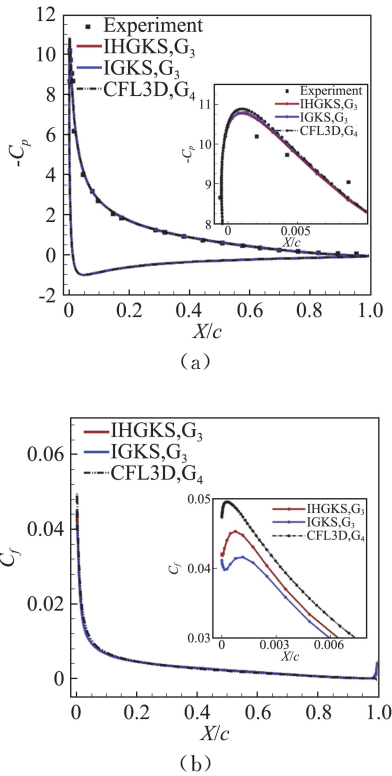


图 8 亚声速 NACA0012 湍流翼型周围的压力系数分布 (a) 和翼型上壁面摩擦系数分布 (b)^[34]

Fig.8 Comparisons of the (a) pressure coefficient C_p and (b) skin friction coefficient C_f around an airfoil^[34]. Results in (b) are only for the upper part of the airfoil

表 1 NACA0012 升力系数 C_L 和阻力系数 C_D

Table 1 C_L and C_D for NACA0012

求解器	IHGKS	IGKS	CFL3D
C_L	1.493 0	1.517 0	1.506 0
C_D	0.021 98	0.026 18	0.022 24

2.7 跨声速 ARA M100 翼身湍流

三维跨声速 ARA M100 翼身湍流来流条件: 马赫数 $Ma=0.8027$, 基于弦长雷诺数 $Re_{lc}=1.31 \times 10^7$

(弦长 $lc=0.245$), 翼身攻角 2.873° 。采用 CFL3D 第 6 版网站^[39] 提供的计算域和网格, 其中 C-O 型网格设置为 $321 \times 57 \times 49$ 。图 9 显示了 ARA M100 机翼机身, 其中黑色部分为机翼, 绿色部分为机身。

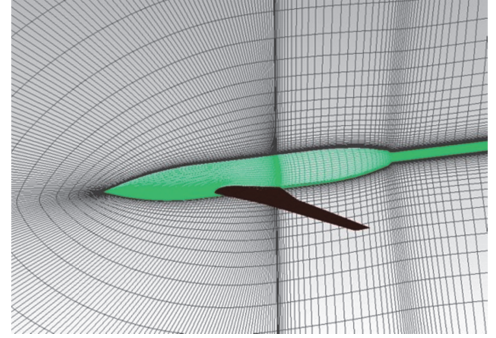


图 9 ARA M100 翼身构型^[34]

Fig.9 Configuration of the ARA M100 wing-body

图 10(a) 给出了翼尖附近截面 $Z/b=0.935$ 的马赫数的云图, 该云图显示激波-边界层相互作用, 证实了当前隐式 HGKS 在激波捕捉方面的鲁棒性。CFL3D 网站的实验数据、隐式 HGKS、二阶隐式 GKS 和基于 SA 模型的 CFL3D 的在翼根附近典型截面 $Z/b=0.123$ 压力系数 C_p 的结果比较如图 9(b) 所示。所有方法在该截面压力系数 C_p 都与实验数

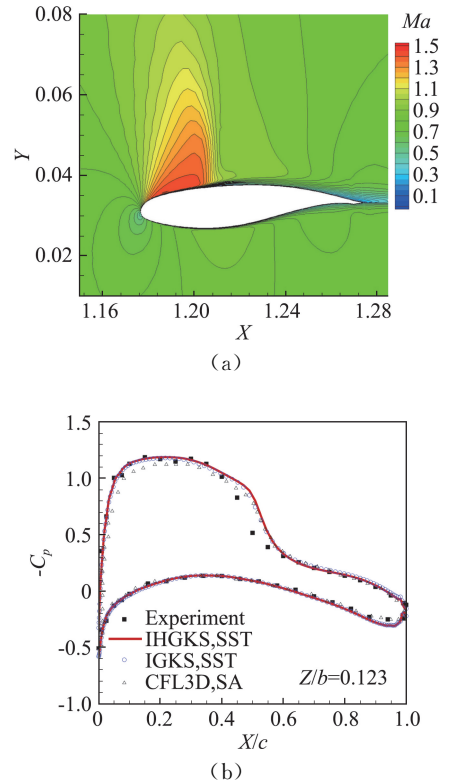


图 10 跨声速 ARA M100 湍流在截面 $Z/b=0.935$ 马赫数云图 (a) 和 $Z/b=0.123$ 压力系数 C_p 分布 (b)^[34]
Fig.10 (a) Contours of Mach number at slice $Z/b=0.935$; (b) Comparisons of the pressure coefficient C_p profiles at slice $Z/b=0.123$ ^[34]

据吻合较好。以上结果表明相比于数值离散的误差, 湍流模型的误差在跨声速三维复杂 RANS 模拟中占主导地位。该算例验证了隐式 HGKS 的鲁棒性和模拟三维工程湍流的能力。

3 结 论

本文回顾了高阶气体动理学格式及其在湍流数值模拟中的应用研究。时空耦合的气体动理学求解器可以提供通量的时间导数。基于两步四阶时间离散和高精度空间重构, 我们发展了具有四阶时间精度的气体动理学格式。该格式不仅具有更高的数值精度和更好的稳定性, 而且有处理复杂流动问题的能力。数值结果表明, 高阶气体动理学格式可以为可压缩湍流的数值模拟提供有力的计算工具。未来, 将使用高阶气体动理学格式研究更具有挑战性的可压缩湍流问题, 例如超声速湍流边界层和激波边界层相互作用等。希望为可压缩强间断湍流的流动机理研究探索新方向。

同时值得指出的是, 气体动理学格式的主要优势是给出了在网格边界上气体分布函数的演化解。除了给出对应的数值通量外, 在网格边界上的其它物理量也能够显示地给出来, 比如网格边界上在这一时间步长结束时的守恒量。所以格式除了更新网格里面的守恒量的值, 每个网格内的守恒量的梯度也可以根据高斯定律由边界上的值积分直接确定。这一性质对构造紧致高阶气体动理学格式提供了可靠的网格局部的动力学基础, 从而避免了用很远处和本网格没有直接动力学关系的量来做高阶重构。这方面的研究在过去几年得到了飞速发展^[21]。这一基于局部高阶动力学演化解的指导方向是发展下一代高阶计算流体力学格式的可行之道。

致谢: 感谢广州天河超算中心提供计算资源。

参 考 文 献:

- [1] POPE S B. Turbulentflows[M]. Cambridge, 2001.
- [2] KIM J, MOIN P, MOSER R. Turbulence statistics in fully developedchannel flow at low Reynolds number[J]. J Fluid Mech, 1987, 177: 133-166.
- [3] MOIN P, MAHESH K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research[J]. Annu Rev Fluid Mech, 1998, 30: 539-578.
- [4] LEE M, MOSER R. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$ [J]. J Fluid Mech, 2017, 774: 395-415.
- [5] WANG L P, CHEN S Y, BRASSEUR J G, et al. Examination of hypotheses in the Kolmogorov refined turbulence theory through high-resolution simulations. Part 1. Velocity field[J]. J Fluid Mech, 1996, 309: 113-156.
- [6] CHEN S Y, DOOLEN G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Annu Rev Fluid Mech, 1998, 30: 329-364.
- [7] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. J Comput Phys, 1992, 103:16-42.
- [8] GAO H, FU D X, MA Y W, et al. Direct numerical simulation of supersonic turbulent boundary layer flow[J]. Chinese Physics Letters, 2005, 22(7): 1709.
- [9] WANG J C, WANG L P, XIAO Z L, et al. A hybrid numerical simulation of isotropic compressible turbulence[J]. J Comput Phys, 2010, 229: 5257-5279.
- [10] SLOTNICK J, KHODADOUST A, ALONSO J, et al. CFD vision 2030 study: A path to revolutionary computational aerosciences[R]. NASA/CR-2014-218178.
- [11] XU K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method[J]. J Comput Phys, 2001, 171: 289-335.
- [12] XU K. Direct modeling for computational fluid dynamics: Construction and application of unified gas kinetic schemes[M]. World Scientific, 2015.
- [13] BHATNAGAR P L, GROSS E P, KROOK M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems [J]. Physical Review, 1954, 94(3):511.
- [14] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. J Comput Phys, 1996, 126: 202-228.
- [15] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 2011, 230: 1766-1792.
- [16] LI Q, XU K, FU S. A high-order gas-kinetic Navier-Stokes flow solver[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229: 6715-6731.
- [17] LUO J, XU K. A high-order multidimensional gas-kinetic scheme for hydrodynamic equations [J]. Science China Technological Sciences, 2013, 56: 2370-2384.
- [18] LI J Q, DU Z F. A two-stage fourth order time-accurate discretization for Lax-Wendroff type flow solvers I. Hyperbolic conservation laws[J]. SIAM J Sci Computing, 2016, 38: 3046-3069.
- [19] PAN L, XU K, LI Q B, et al. An efficient and accurate two-stage fourth-order gas-kinetic scheme for the Navier-Stokes equations[J]. J Comput Phys, 2016, 326: 197-221.
- [20] JI X, ZHAO F, SHY Y W, et al. A family of high-order gas-kinetic schemes and its comparison with Riemann solver based high-order methods [J]. Journal of Computational Physics, 2018, 356: 150-173.
- [21] ZHAO F, JI X, SHY Y W, et al. Compact higher-order gas-kinetic schemes with spectral-like resolution for compressible flow simulations[J]. Advances in Aerodynamics, 2019, 1:13.
- [22] FU S, LI Q. Numerical simulationof compressible mixing layers [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2006, 27: 895-901.
- [23] KUMAR G, GIRIMAJI S S, KERIMO J. Weno-enhanced gas-kinetic scheme for direct simulations of compressible transition and turbulence[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 234:499-523.
- [24] CHEN H, KANDASAMY S, ORSZAG S, et al. Extended Boltzmann kinetic equation for turbulent flows[J]. Science, 2003,301: 633-636.
- [25] JIANG J, QIAN Y. Implicit gas-kinetic BGK scheme with multigrid for 3D stationary transonic high-Reynolds number flows[J]. Computers & Fluids,2012, 66: 21-28.

- [26] PAN D, ZHONG C, LI J, et al. A gas-kinetic scheme for the simulation of turbulent flows on unstructured meshes [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2016, 82: 748-769.
- [27] RIGHI M. A gas-kinetic scheme for turbulent flow[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2016, 97: 121-139.
- [28] LI J, ZHONG C, PAN D, et al. A gas-kinetic scheme coupled with SST model for turbulent flows [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016.
- [29] TAN S, LI Q, XIAO Z, et al. Gas kinetic scheme for turbulence simulation[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 78: 214-227.
- [30] CAO G, SU H, XU J, et al. Implicit high-order gas kinetic scheme for turbulence simulation[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 92: 958-971.
- [31] TITAREV V A, TORO E F. Finite volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws[J]. *J Comput Phys*, 2014, 201: 238-260.
- [32] WOODWARD P, COLELLA P. Numerical simulations of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *J Comput Phys*, 1984, 54: 115-173.
- [33] BO Y T, WANG P, GUO Z L, et al. DUGKS simulations of three-dimensional Taylor-Green vortex flow and turbulent channel flow[J]. *Computers & Fluids*, 2017, 155 9-21.
- [34] CAO G. High-order gas-kinetic schemes for turbulence modeling and simulation [D]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 2020.
- [35] CAO G, PAN L, XU K. Three dimensional high-order gas-kinetic scheme for supersonic isotropic turbulence I: Criterion for direct numerical simulation[J]. *Computers & Fluids*, 2019, 192:104273.
- [36] SAMTANEY R, PULLIN D I, KOSOVIC B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics[J]. *Physics of Fluids*, 2001, 13(5):1415-1430.
- [37] Turbulence modeling resource. <https://turbmodels.larc.nasa.gov>, 2018.
- [38] GREGORY N, O' REILLY C. Low-speed aerodynamic characteristics of NACA0012 aerofoil section, including the effects of upper-surface roughness simulating hoar frost. HM Stationery Office London, 1973.
- [39] Cfl3d version 6 home page[OB/OL]. <http://c3d.larc.nasa.gov>, 2017.