

文章编号:0559-9350(2006)07-0858-07

三角形网格下求解二维浅水方程的 KFVS 格式

潘存鸿¹,徐昆²

(1. 浙江省水利河口研究院,浙江 杭州 310020;2. 香港科技大学 数学系,香港)

摘要:以 Boltzmann 方程为基础,建立了求解二维浅水方程的 KFVS(Kinetic Flux Vector Splitting)格式。为保证计算格式的和諧性,通量计算中考虑了底坡源项的作用。在此基础上,采用特殊的底坡源项处理技术,建立了三角形网格下二阶精度的 KFVS 和谐格式。经典算例和钱塘江涌潮计算验证,证明本文提出的方法分辨率高,边界适应性强,并具有模拟间断流动的能力。

关键词:二维浅水方程;有限体积法;三角形网格;KFVS 格式;源项

中图分类号:TV131.4

文献标识码:A

上世纪 90 年代中后期以来,徐昆^[1,2]将原应用在气动中的基于 Boltzmann 方程的模型方法应用到求解浅水方程,建立了浅水 KFVS(Kinetic Flux Vector Splitting)模型和 BGK(Bhatnagar-Gross-Krook)模型。以后 Ghidaoui 等^[3]、邓家泉^[4]进行了推广应用,并证明了 BGK 格式满足熵条件。上述模型因通量计算中没有考虑底坡项的作用,因此计算格式不具有“和谐性”(Well-balanced),即在非平底静水条件下,不能保持流速为零和水位为常数的精确解。鉴于重力对水流运动的影响与水流变量如水深、流速的空间梯度同阶,2002 年徐昆在分子分布函数中考虑了重力对分子速度变化的影响,分别得到了和谐的 BGK 格式^[5]和 KFVS 格式^[6]。KFVS 模型是 BGK 模型不考虑 Boltzmann 方程碰撞项的简化模型,相应地,KFVS 模型没有计及二阶项(即黏性项)的作用。事实上,对于天然河流、海岸等大尺度研究水域,二阶项的作用很小,KFVS 模型已足够满足研究精度,且其计算量仅为 BGK 模型的 1/3 左右。

本文在文献[6]的基础上,将一维浅水 KFVS 模型扩展到非结构三角形网格下、具有空间二阶精度的二维浅水 KFVS 模型,并采用特殊的底坡源项处理技术,建立了和谐的计算格式。

1 控制方程及其有限体积法离散

无碰撞二维 Boltzmann 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (1)$$

式中: f 为分子分布函数; u 、 v 分别为分子在 x 、 y 方向的分子速度; ϕ 为外力作用项,这里考虑非平底引起的重力项和阻力项, $\phi_x = g(S_{0x} - S_{fx})$, $\phi_y = g(S_{0y} - S_{fy})$; g 为重力加速度; S_{fx} 、 S_{fy} 分别为 x 、 y 方向的阻力项; S_{0x} 、 S_{0y} 分别为 x 、 y 方向的底坡项,定义为 $S_{0x} = -\partial b / \partial x$, $S_{0y} = -\partial b / \partial y$, b 为底高程。 f 为空间 x 和 y 、时间 t 和分子速度 u 、 v 的函数,相应平衡状态下的分布函数 q ,即浅水系统中熵为最大时的状态,为 Maxwellian 分布^[3,4]

$$q = h(-) e^{-[(u-v)^2 + (v-v)^2]} \quad (2)$$

收稿日期:2005-07-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(40106010);浙江省自然科学基金资助项目(M403054)

作者简介:潘存鸿(1963-),男,浙江宁波人,教授级高级工程师,主要从事河口海岸规划及研究。E-mail:panch@zjhe.org

式中: $\rho = 1/(gh)$; U 和 V 分别为水流在 x 和 y 方向的流速; h 为水深。

对于平衡状态, 即 $f = q$, 并利用相容条件, 则有

$$\left[\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial v} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} d u d v = 0 \quad (3)$$

将式(2)代入式(3), 并利用 Boltzmann 变量与宏观变量的关系式^[3,4], 可得二维浅水方程

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial hUV}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial hUV}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hV^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (4)$$

以上结果表明, 二维浅水方程可以从 Boltzmann 方程得到。这为从 Boltzmann 方程出发求解二维浅水方程奠定了理论基础。事实上, 基于 Boltzmann 方程的模型方法并不直接求解式(4), 而是通过求解 Boltzmann 方程式(1)间接求解浅水方程。

将式(1)乘以 $(1, u, v)^T$, 并对分子速度空间积分, 则有

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (5)$$

$$\text{式中: } E = [h, hU, hV]^T; F = \begin{bmatrix} u f d u d v & u^2 f d u d v & u v f d u d v \\ u v f d u d v & v^2 f d u d v & \end{bmatrix}^T; G = \begin{bmatrix} u v f d u d v \\ v^2 f d u d v \end{bmatrix}^T; S = [0, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy})]^T$$

基于 Boltzmann 方程的模型方法是通过求解式(5)得到水流宏观变量的。

为模拟平面形态复杂的天然水域, 采用任意三角形剖分, 并采用网格中心格式, 即将物理量定义在三角形形心, 控制体即为单元本身。设 Δ_i 为第 i 个三角形单元域, Γ_i 为其边界, 对方程式(5)应用有限体积法离散, 并利用格林公式, 则有

$$A_i \frac{\partial E}{\partial t} + (F \cos \theta + G \sin \theta) dl = \iint_{\Delta_i} S_i d x d y \quad (6)$$

式中: A_i 为三角形单元 Δ_i 的面积; $(\cos \theta, \sin \theta)$ 为 Γ_i 外法向单位向量; dl 为线积分微元。

对式(6)时间导数采用前差, 并记 $F_n = F \cos \theta + G \sin \theta$, 即得基本数值解公式为

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 F_{nj} l_j + \frac{\Delta t}{A_i} \iint_{\Delta_i} S_{\alpha i} d x d y + \Delta t S_{fi} \quad (7)$$

式中: Δt 为时间步长; 下标 j 表示 i 单元第 j 边; l_j 为三角形边长; 上标 n 为时间步。

求解式(7)的核心是法向数值通量的计算以及底坡源项的处理。因法向数值通量求解方法不同, 发展了许多计算方法, 如 Godunov 型格式、TVD 格式、MacCormack 格式、BGK 格式等, 本文采用 KFVS 格式计算法向数值通量。

2 二维浅水方程的 KFVS 格式

从式(7)可以看出, KFVS 格式的关键是求解单元界面的分子分布函数 f 。引进局部坐标系 $x-t$ (为方便起见仍用 x 表示), x 垂直于单元界面, 用 u 和 v 分别表示分子法向速度和切向速度。对于平衡状态, 无碰撞 Boltzmann 方程式(1)的解为

$$f(x_{ij}, t, u, v) = f_0(x_0, 0, u_0, v) \quad (8)$$

式中: 下标 0 表示初始时刻的值; f_0 为初始分布函数; x_{ij} 为 i 单元和 j 单元的界面位置; x 为分子运动轨

迹,假定分子在很短时间间隔 $t - t$ 内从 x 运动到 $x, x = x + u(t - t) + \frac{1}{2} \phi_x(t - t)^2$; 因外力(本文为重力和摩阻力)引起的分子速度 u 的改变,其修正式为 $u = u + \phi_x(t - t)$ 。

为考虑因外力引起的分子速度的改变,必需对分子分布函数进行修正。因分子速度的改变,在 t 时刻平衡分布函数需作相应的修正。应用 Taylor 展开,并忽略高阶项,则得 t 时刻平衡分布函数为

$$q(x, t, u, v) = q(x, t, u, v) [1 + 2 \phi_x(u - U)(t - t)] \quad (9)$$

式中: $2 \phi_x(u - U)(t - t)$ 项表示分子速度改变而引起的平衡分布函数的变化。

为弥补非 Maxwellian 分布以及忽略高阶项引起的误差,在 ϕ_x 项中引进常数,式(9)变为

$$q(x, t, u, v) = q(x, t, u, v) [1 + 2 \phi_x(u - U)(t - t)] \quad (10)$$

值将在文后给出,其与分子对 $(u, u^2, uv)^T$ 求矩有关。外力项 ϕ_x 为

$$\phi_x = g(S_{0x} - S_{fx})^l (1 - H[x]) + g(S_{0x} - S_{fx})^r H[x] \quad (11)$$

式中: $H[x]$ 为 Heaviside 函数;上标 l, r 分别表示界面的左边和右边。

式(8)中的初始分布函数 f_0 ,可应用泰勒级数在界面处的平衡分布函数展开得到

$$f_0 = q^l (1 + a^l(x - x_{ij})) (1 - H[x - x_{ij}]) + q^r (1 + a^r(x - x_{ij})) H[x - x_{ij}] \quad (12)$$

式中: q^l 和 q^r 为界面左边和右边的 Maxwellian 分布函数;系数 $a^{l,r}$ 为

$$a^{l,r} = m_1^{l,r} + m_2^{l,r} u + m_3^{l,r} v + m_4^{l,r} (u^2 + v^2) \quad (13)$$

式中: $(m_1^{l,r}, m_2^{l,r}, m_3^{l,r}, m_4^{l,r})$ 为系数, $m_1^{l,r} = \left[\frac{3(U^2 + V^2)}{gh^2} \right] \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2U}{gh^2} \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \frac{2V}{gh^2} \frac{\partial(hV)}{\partial x}$, $m_2^{l,r} = \left[-\frac{4U}{gh^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{gh^2} \frac{\partial(hU)}{\partial x} \right]$, $m_3^{l,r} = \left[-\frac{4V}{gh^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{gh^2} \frac{\partial(hV)}{\partial x} \right]$, $m_4^{l,r} = \left[\frac{1}{gh^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right]$, 所有系数由重构数据确定。为书写简化起见,文中后设 $x_{ij} = 0$ 。

式(12)为 $t = 0$ 时刻的分子分布函数 f_0 ,将其代入式(8)时需考虑 t 时刻分子到达 $x = 0$ 时的速度 u 的变化

$$f_0(-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2, 0, u - \phi_x t, v) = q_0^l \left[1 + a^l(-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2) \right] \left[1 - H[-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2] \right] + q_0^r \left[1 + a^r(-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2) \right] H[-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2] + q_0^l (1 - uta^l) H[u] + q_0^r (1 - uta^r) (1 - H[u]) \quad (14)$$

上式已略去与 t^2 有关的项。因分子速度从 $t = 0$ 到 t 时刻的改变,需对 q_0^l 和 q_0^r 进行修正,其关系为: q_0^l

$= q^l (1 + 2 a^l \phi_x (u - U^l) t)$; $q_0^r = q^r (1 + 2 a^r \phi_x (u - U^r) t)$ 。因此,式(14)变为: $f_0(-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2, 0, u - \phi_x t, v) = q^l (1 + 2 a^l \phi_x (u - U^l) t) (1 - uta^l) H[u] + q^r (1 + 2 a^r \phi_x (u - U^r) t) (1 - uta^r) (1 - H[u])$, 进一步化简得

$$f_0(-ut - \frac{1}{2} \phi_x t^2, 0, u - \phi_x t, v) = q^l (1 + 2 a^l \phi_x (u - U^l) t - uta^l) H[u] + q^r (1 + 2 a^r \phi_x (u - U^r) t - uta^r) (1 - H[u]) \quad (15)$$

从式(15)可以看出,外力对分子分布函数的作用与 a^l 和 a^r 同阶。通过简化 Heaviside 函数,外力项 ϕ_x 变成

$$\phi_x = -g \left\{ (S_{0x} - S_{fx})^l H[u] + (S_{0x} - S_{fx})^r (1 - H[u]) \right\} \quad (16)$$

将式(15)代入式(8),可以得到 $x = 0$ 处的分布函数 $f(0, t, u, v)$ 。积分式(8)即可得到通过单元界面的质量和动量的数值通量

$$\begin{bmatrix} F_h(t) \\ F_{hU}(t) \\ F_{hV}(t) \end{bmatrix}_{ij} = \int_{-u}^u \int_{-v}^v \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} f_{ij}(0, t, u, v) du dv \quad (17)$$

可以证明^[5],在上式对分子速度求矩过程中,只有取 $u = 1$, $u^2 = 5/4$, $uv = 1$,才能得到和谐解。即在静水初始条件情况下,流速为零,水位为常数的静水状态可以严格保持。换言之,静水时动量方程中的单元界面数值通量与单元里的源项刚好抵消。

3 底坡源项的处理

求解守恒型非平底浅水流动方程时,需对底坡源项作特殊的处理,以致方程左端的压力项与方程右端的底坡源项“和谐”。其基本思路是底坡源项的离散与压力项相同。所谓“和谐”格式,对于与 i 单元相邻的所有 j 单元,若在 n 时刻满足

$$h_i^n + b_i = h_j^n + b_j = z; \quad (U, V)_i^n = (U, V)_j^n = 0 \quad (18)$$

式中: z 为水位。

则要求推得 $n+1$ 时刻

$$h_i^{n+1} = z; \quad (U, V)_i^{n+1} = 0 \quad (19)$$

20 世纪 90 年代以来,国内外许多学者致力于这一问题的研究^[7~17],并在四边形网格上得到了圆满的解决^[13,15,17]。徐昆建立了四边形网格的和谐 BGK 格式^[5]和一维 KFVS 格式^[6]。无结构三角形网格上建立“和谐”格式的困难要比四边形网格大得多,最近 E. Audusse 等^[18]建立了以三角形节点为控制体中心的“和谐”格式。为了建立和谐的 KFVS 格式,除在上述数值通量计算中考虑重力对分子分布函数的作用外,还要求方程左端的压力项与方程右端的底坡源项之和始终满足

$$\left(\frac{1}{2} gh^2\right) + gh b = gh z \quad (20)$$

因此,建立和谐格式的关键是底坡源项的离散与压力项相同。下面分别讨论空间一阶和二阶精度的和谐格式。

3.1 一阶精度的和谐格式 定义单元界面处底高程

$$b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(b_i + b_j) \quad (21)$$

插值前水深先要转换成水位^[8],即应用 Zhou 等人^[13]的“水面梯度法(Surface Gradient Method,简称 SGM)”或许为厚、潘存鸿^[15]的“水位床底方程法(Water Level-bottom topography Formulation,简称 WLF)”。事实上,上述 2 个方法的结果是一样,只是出发点不同。界面处水深为

$$h_{ij} = (h_i + b_i - b_{ij}) \quad (22)$$

对于一阶精度的计算格式,由于假定单元内的水位相同,根据式(20),则有

$$\left(\frac{1}{2} gh^2\right) = - gh b$$

上式表明,动量方程右端的底坡源项可用方程左端的压力项来代替。因此,式(7)变为

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 F_{ij} l_j + \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 S_{0ij} l_j + \Delta t S_{fi} \quad (23)$$

式中: $S_{0ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} gh_{ij}^2 \end{bmatrix}$

容易证明式(23)是和谐格式。设水流 n 时刻满足式(18),则式(23)动量方程只有压力项和底坡源项不为零,即

$$0 = - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} gh_{ij}^2 l_j + \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} gh_{ij}^2 l_j \quad (24)$$

因此,格式是和谐的,即可得式(19)。对于边界单元采用虚单元技术^[19],亦可证明格式是和谐的。

3.2 二阶精度的和谐格式 为提高计算精度,可应用与 MUSCL 类似的方法,将上述空间一阶精度格式扩展到空间二阶精度。应用文献[20]的方法求得界面处水位 z_{ij} ,定义界面处水深 $h_{ij} = z_{ij} - b_{ij}$,界面处

底高程 b_{ij} 仍由式 (21) 定义。通过比较一阶格式, 为满足和谐条件, 将底坡源项离散成如下形式

$$S_{0ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} g (h_{ij} + h_i) (b_{ij} - b_i) \end{bmatrix} \quad (25)$$

以后计算与一阶格式相同。同样可以证明, 应用式 (25) 离散底坡源项, 格式是和諧的。

设水流 n 时刻满足式 (18), 则式 (23) 动量方程简化为 $0 = -\frac{t}{A_i} \frac{1}{2} g h_{ij}^2 l_j - \frac{t}{A_i} \frac{1}{2} g (h_{ij} + h_i) (b_{ij} - b_i) l_j$, 整理化简得

$$\frac{1}{2} g (h_{ij} + h_i) (z_{ij} - z_i) l_j = 0 \quad (26)$$

上式满足式 (20), 表明格式是和諧的。从另一角度看, 由于二阶精度数据重构仍保持静水条件, 即 $z_{ij} = z_i$, 因此, 可推得式 (19)。

4 算例

4.1 斜水跃问题 超临界流遇收缩角为 β 的边壁, 形成角度为 θ 的斜水跃, 见图 1。此算例常被用于测试计算格式在超临界流中模拟激波的能力, 文献 [21~24] 分别应用 Osher^[21]、HLL^[22]、Roe 型^[23,24] 等以近似 Riemann 解为基础的 Godunov 型格式计算了本算例; 文献 [17] 则应用准确 Riemann 解求解。计算域长 40m, 左、右宽度分别为 30m 和 25.275m。边壁收缩角 $\beta = 8.95$ 度, 底高程为 0。

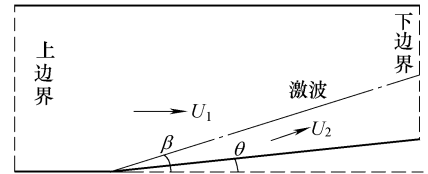


图 1 斜水跃示意

初始条件和入流边界条件为均匀超临界流, 水位 $z = 1\text{m}$, 流速 $u = 8.57\text{m/s}$, $v = 0$, 相应的 Froude 数 $Fr = 2.74$; 出流边界条件为 $\partial z / \partial x = \partial u / \partial x = \partial v / \partial x = 0$ 。计算网格为三角形, 单元数为 9 600。计算分别采用一阶和二阶精度, 二阶精度的计算结果见图 2 和图 3, 激波线角度 $\theta = 30$ 度, 激波后水位 $z = 1.499\text{m}$, 流速 $U = 7.951\text{m/s}$, 相应的 $Fr = 2.074$ 。与 Hager 等人的精确解^[25], $\theta = 30$ 度, $z = 1.5\text{m}$, $U = 7.956\text{m/s}$ 和 $Fr = 2.075$ 非常接近。

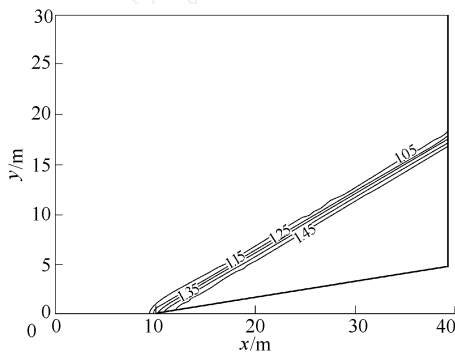


图 2 斜水跃水位等值线

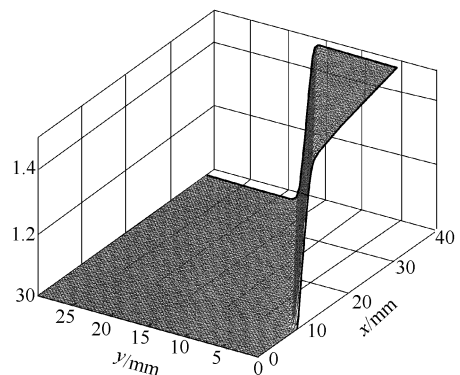


图 3 斜水跃水面

4.2 钱塘江涌潮数值模拟 计算区域从上游仓前到下游激浦, 全长 72km, 单元数 1 080 个, 最小边长约 200m, 计算网格如图 4。计算地形采用 2000 年 7 月实测, 上、下水边界均给定实测潮位过程, 边界流速应用一维特征线方法求得^[19]; 陆边界采用滑移条件; 动边界采用改正的干底 Riemann 解处理^[26]。

计算了 2000 年 9 月 16~17 日连续 3 个大潮的流场, 经率定, 曼宁系数涨潮为 0.003, 落潮为 0.008~0.01。时间步长 10s。计算结果复演了钱塘江涌潮形成和发展的过程, 计算最大涌潮流速达 8m/s 以上, 图 5 和图 6 分别为曹娥江口和盐官处潮位验证结果, 图中明显反映出涨潮时 (涌潮) 潮位暴涨的过程。

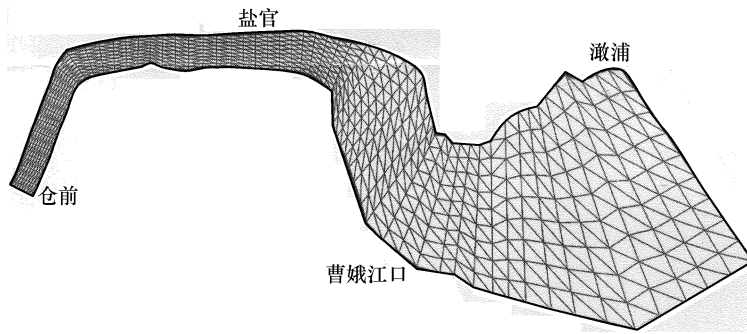


图4 钱塘江计算网格

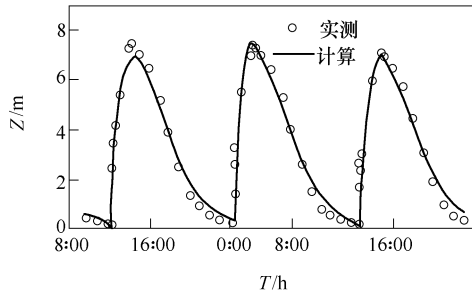


图5 曹娥江口潮位验证结果

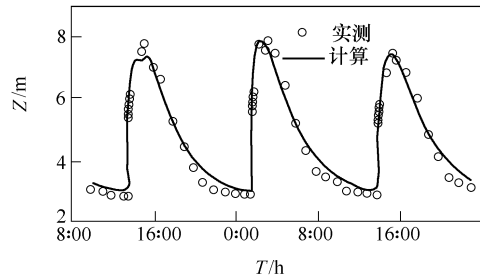


图6 盐官潮位验证结果

5 结束语

本文以无碰撞的 Boltzmann 方程为基础,建立了求解二维浅水方程的 KFVS 格式。为保证计算格式的和谐性,一方面在通量计算中考虑了底坡源项的作用;另一方面,采用特殊的底坡源项处理技术,建立了三角形网格下一阶和二阶精度的 KFVS 和谐格式。经典型算例和钱塘江河口涌潮计算验证,模型具有精度高,稳定性好,且边界适应性强,能模拟间断流动的能力。

本文提出的底坡源项离散方法适用于基于三角形网格的有限体积法,具有较大的推广价值。

参 考 文 献:

- [1] Xu Kun. Gas-kinetic scheme for unsteady compressible flow simulations [R]. 29th Computational Fluid Dynamics, Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1998 - 03, 1998.
- [2] Xu Kun. Unsplitting BGK-type schemes for the shallow water equations [J]. International Journal of Modern Physics C, 1999, 10(4) : 505 - 516.
- [3] Ghidaoui M S, Deng J Q, Gray W G, Xu K. A Boltzmann based model for open channel flows [J], International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2001, 35(4) : 449 - 494.
- [4] 邓家泉. 二维明渠非恒定水流 BGK 数值模型 [J]. 水利学报, 2002, (4) : 1 - 7.
- [5] Xu Kun. A well-balanced gas-kinetic scheme for the shallow-water equations with source terms [J]. Journal of Computational Physics, 2002, 178 : 533 - 562.
- [6] 徐昆, 潘存鸿. 求解非平底一维浅水方程的 KFVS 格式 [J]. 水动力学研究与进展, 2002, 17(2) : 140 - 147.
- [7] 谭维炎, 胡四一. 浅水流动计算中一阶有限体积法 Osher 格式的实现 [J]. 水科学进展, 1994, 5(4) : 262 - 270.
- [8] 胡四一, 谭维炎. 无结构网格上二维浅水流动的数值模拟 [J]. 水科学进展, 1995, 6(1) : 1 - 9.
- [9] Bermudez A, Elena Vazquez M. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms [J]. Computers & Fluids, 1994, 23(8) : 1049 - 1071.
- [10] LeVeque R J. Balancing source terms and flux gradient in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 148 : 346 - 365.
- [11] Bermudez A, Dervieux A, Desideri J, Vazquez M E. Upwind schemes for two-dimensional shallow-water equations with

- variable using unstructured meshes[J]. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1998, 155: 49 - 72.
- [12] Vazquez-Cendon M E. Improved treatment of source terms in upwind schemes for shallow water equation in channels with irregular geometry[J], *Journal of Computational Physics*, 1999, 148: 497 - 526.
- [13] Zhou J G, Causon D M, Mingham C G, Ingham D M. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations[J], *Journal of Computational Physics*, 2001, 168: 1 - 25.
- [14] Gascon L, Corberan J M. Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 172: 261 - 297.
- [15] Hui W H, Pan Cunhong. Water level bottom topography formulation for the shallow water flow with application to the tidal bores on the Qiantang river[J]. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2003, 112(3): 549 - 554.
- [16] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. *水科学进展*, 2003, 14(4): 430 - 436.
- [17] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 求解二维浅水流动方程的 Godunov 格式[J]. *水动力学研究与进展*, 2003, A 辑, 18(1): 16 - 23.
- [18] Audusse E, Bristeau M O. A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 206: 311 - 333.
- [19] Pan Cunhong, Lin Bingyao, Mao Xianzhong. New development in the numerical simulation of the tidal bore [A], *Proceedings of the International Conference on Estuaries & Coasts*[C]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2003, 1: 99 - 114.
- [20] 宋松和, 李荫藩. 解二维标量双曲型守恒律的满足极值原理无结构三角形网格有限体积法[J]. *数值计算与计算机应用*, 1997, (2): 106 - 113.
- [21] Zhao D H, Shen H W, Lai J S, Tabios G Q. Approximate riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modeling [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1996, 122(12): 692 - 702.
- [22] Alcrudo F, Garcia-Navarro P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for 2D shallow water equations [J]. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1993, 16: 489 - 505.
- [23] Hu H, Mingham C G, Causon D M. A bore-capturing finite volume method for open channel flows[J], *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1998, 28: 1241 - 1261.
- [24] Rogers B, Fasayuki M, Borthwick G L. Adaptive Qtree godunov-type scheme for shallow water equations[J], *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2001, 35: 247 - 280.
- [25] Hager W H, Schwalt S, Jimenez O, Chaudhry M H. Supercritical flow near an abrupt wall deflection[J], *Journal of Hydraulic Research*, 1994, 32(1): 103 - 118.
- [26] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 浅水问题动边界数值模拟[J]. *水利水运工程学报*, 2004, (4): 1 - 7.

Kinetic flux vector splitting scheme for solving 2-D shallow water equations with triangular mesh

PAN Cun-hong¹, XU Kun²

(1. Zhejiang Institute of Hydraulics and Estuary, Hangzhou 310020, China;

2. Hong Kong University of Science and Technology, Kowloon, Hong Kong, China)

Abstract: Based on the Boltzman equation, the kinetic flux vector splitting (KFVS) scheme for solving 2-D shallow water equations with triangular mesh is developed. In order to establish a well-balanced scheme, the source term effect is taken into account explicitly in the flux evaluation. On this basis a special technique for dealing with source term due to bottom topography is adopted and the well-balanced KFVS scheme with triangular mesh possessing second order accuracy is established. The validity of the proposed method is verified by the comparison of calculation result of a traditional typical example with the field observation data of a tidal bore in Qiantang River.

Key words: 2-D shallow water equations; kinetic flux vector splitting (KFVS) scheme; finite volume method (FVM); triangular mesh; source terms

(责任编辑:李福田)