

# 辐射输运方程的统一气体动理学格式

献给陈恕行教授 80 华诞

江松<sup>1\*</sup>, 徐昆<sup>2</sup>, 孙文俊<sup>1,3</sup>, 许小静<sup>4</sup>

1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;

2. 香港科技大学数学系, 香港;

3. 北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871;

4. 西南科技大学理学院, 绵阳 621010

E-mail: jiang@iapcm.ac.cn, makxu@ust.hk, sun\_wenjun@iapcm.ac.cn, xuxiaojing0603@126.com

收稿日期: 2020-09-11; 接受日期: 2020-12-15; 网络出版日期: 2021-03-08; \* 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11631008, 11772281, 91852114 和 11671048)、中德中心 (批准号: GZ 1465)、中以合作项目 (批准号: 2519/17)、香港研究基金会 (批准号: 16206617)、中国工程物理研究院基金 (批准号: CX20200026)、国家重大计划 (批准号: GJXM92579) 和科学挑战计划 (批准号: TZ2016002) 资助项目

**摘要** 辐射输运方程的数值模拟在天体物理、武器物理和惯性约束与磁约束聚变等研究中都起着非常重要的作用. 在实际问题中, 背景介质的不透明度系数决定了辐射光子在其中的传输行为. 光性薄 (不透明度系数小) 的介质对辐射光子是透明的, 光子与背景介质的相互作用弱, 光子传输具有输运传播性质; 而光性厚 (不透明度系数大) 的介质对辐射光子是不透明的, 光子与背景介质的相互作用强, 光子传输具有扩散性质. 因此在辐射输运方程的计算中, 如何设计既能得到光子输运传播性质又能捕捉光子扩散传播性质的渐近保持离散格式是目前一个非常活跃和前沿的研究方向. 本文简要介绍近几年在辐射输运方程的渐近保持统一气体动理学格式 (unified gas kinetic scheme, UGKS) 研究方面的进展. 本文主要以灰体辐射输运方程为例, 详细介绍 UGKS 的构造方法并给出其渐近分析. 同时, 结合角度有限元方法和球谐函数展开的方法, 介绍如何减弱/去除基于离散纵标法的 UGKS 具有射线效应的问题, 以及相应的改进渐近保持格式. 此外, 也介绍了将渐近保持的 UGKS 应用拓展到考虑流体运动的完全辐射流体力学方程组. 最后, 用一些数值例子验证了格式的渐近保持性和保正性等性质.

**关键词** 辐射输运方程 渐近保持 保正 统一气体动理学格式 辐射流体力学方程组

**MSC (2020) 主题分类** 65M08, 65Q10, 65Z99

## 1 引言

本文是对辐射输运方程渐近保持统一气体动理学格式 (unified gas kinetic scheme, UGKS) 近年来研究进展的综述. 辐射输运方程 (组) 描述光子在背景介质中的传输及其与介质的相互作用过程, 它在

英文引用格式: Jiang S, Xu K, Sun W J, et al. Unified gas kinetic schemes for the radiation transfer equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 799–832, doi: 10.1360/SSM-2020-0278

武器物理、天体物理和惯性约束聚变等领域中有着非常广泛且重要的应用. 由于方程本身的复杂性, 对其进行理论上的解析求解在数学上几乎是不可能的. 随着辐射输运方程在科学技术和工程领域越来越广泛的应用, 对其数值方法的研究已成为一个很活跃的前沿研究领域 (参见文献 [1-12]).

对辐射输运方程, 数值模拟的难点在于其具有高维度 (一般情形的方程包含时间变量 (1 个)、空间变量 (3 个)、角度变量 (2 个) 和频率变量 (1 个) 共 7 个自变量) 以及由于辐射光子在不同介质区的传输行为不同所引起的多尺度等特性. 在辐射光子的传输过程中, 背景介质的特性会极大地影响辐射传输行为. 例如, 对于不透明度系数小 (光性薄) 的介质, 光子具有输运性质; 对于不透明度系数大 (光性厚) 的介质, 光子具有扩散的性质. 因此, 数值方法应考虑到这种多尺度特点, 并以可接受的计算成本得到不同尺度下的解.

在辐射输运方程的计算中, 为了减少计算量, 并且在光性厚介质区得到光子的扩散传播性质, 一个自然的想法是采用辐射输运和辐射扩散耦合建模的方法, 也即在光性薄介质区采用辐射输运建模计算, 在光性厚介质区采用辐射扩散建模计算, 通过流连续的边界条件将两部分耦合起来, 这也称为多物理区域分解方法<sup>[4, 13, 14]</sup>. 该耦合方法虽然能够在各介质区内部得到合理的光子传输性质, 但最大的问题是很难设置不同物理模型之间精确的耦合边界条件, 同时耦合边界的位置也不容易准确地确定. 对实际问题来说, 耦合建模方法难以用于实际问题的辐射输运数值模拟.

与辐射扩散建模相比较, 辐射输运建模是对辐射传输过程更为细致的描述. 为了克服辐射输运与扩散模型耦合计算的困难, 研究者们开始尝试在光性厚的介质区中同样采用辐射输运建模进行数值模拟. 在实际计算中, 为了能够分辨相应的物理尺度, 获得合理的计算结果, 一般的计算格式往往要求计算所用的空间网格步长与介质的平均自由程 (不透明度系数的倒数) 相当. 因此, 对光性厚介质区来说, 所要求的空间计算网格步长非常小, 从而大大增加了计算量. 在目前的计算条件下, 这样的计算量对惯性约束聚变等问题来说是不可承受的.

最近几十年来, 为减少光性厚介质区中辐射输运方程的计算量而提出来的渐近保持格式正成为一个重点的研究方向. 在数学上概括地说, 如果一个辐射输运方程离散格式的空间计算网格步长不依赖于介质的平均自由程, 且能够在光性厚介质区保持辐射光子的扩散传输性质, 则称具有这样性质的数值计算格式为渐近保持的 (asymptotic preserving)<sup>[8, 9, 15-19]</sup>.

输运方程渐近保持格式的思想可追溯到 Larsen 和 Morel<sup>[8]</sup> 及 Larsen 等<sup>[9]</sup> 关于定态中子输运方程数值方法的工作, 以及 Jin 和 Levermore<sup>[15, 16]</sup> 的早期文章. 随后, 辐射输运方程的渐近格式研究得到了大的发展, 产生了一大批工作. 例如, 对非定常问题, 基于将分布函数分解为平衡部分和非平衡偏离, Klar、Jin、Pareschi 和 Toscani 构造了一类渐近保持格式, 细节参见文献 [17, 18]. 文献 [20] 研究了用隐式 Monte Carlo (implicit Monte Carlo, IMC) 方法求解灰体辐射输运方程渐近保持格式. 但随着样本量的增加, 计算量也成倍地增加, 特别是对光性厚的介质区, 由于光子自由程短, 在一个时间步中, 需要对光子的移动过程进行多次追踪. 文献 [2, 21] 采用空间不连续有限元结合角度离散纵标方法研究了灰体辐射输运和多群辐射输运方程的渐近保持格式. 但在该方法中, 一方面需要存储有限元结点的数值, 大大增加了存储量; 另一方面, 有限元离散后形成的代数方程的求解也比较费时. 此外, 文献 [22] 还指出, 为了保证该方法的渐近保持特性, 物质温度方程的求解也要满足一定的要求, 最好也要用不连续有限元方法离散. 因此, 该方法和物质温度只定义在网格中心的流体力学程序耦合时, 如果物质温度处理得不当, 会导致非物理的结果.

Xu 和 Huang<sup>[23]</sup> 提出了渐近保持的 UGKS 来求解稀薄气体中的 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 方程 (参见文献 [24-26]). 该格式是多尺度的, 可以从稀薄气体到连续气体进行多尺度的计算, 并且在过渡区也取得了很好的效果. 后来, 文献 [27] 把文献 [23] 中的 UGKS 方法推广应用到线性辐射输运方

程的计算, 并分析了 UGKS 的渐近保持性质. 在此线性输运方程中, 没有考虑辐射与背景物质的相互作用, 因而在方程形式上与介观 BGK 方程非常相似. 最近, 文献 [11] 利用文献 [23, 27] 中的方法, 首先对考虑辐射与物质相互作用的灰体辐射输运方程设计了渐近保持的 UGKS.

在灰体辐射输运方程中, 辐射不透明度系数只依赖于物质温度, 因此空间区域很容易划分为光性薄和光性厚的区域. 而对多群辐射输运方程来说, 辐射不透明度系数还依赖于光子的频率, 并随光子频率的增大而减小. 因此在每一个计算网格内部, 低频光子群的辐射输运方程是光性厚的, 而高频光子群的辐射输运方程是光性薄的. 与灰体辐射输运方程比较起来, 多群辐射输运方程的计算难度更大一些. 在文献 [11] 研究的基础上, 文献 [12] 利用 UGKS 的能量构造方法, 进一步构造了多群辐射输运方程渐近保持的计算格式.

在惯性约束聚变等实际问题的数值计算中, 通常需要考虑一般几何区域和特殊物理构型下辐射输运方程的模拟. 为此, 本文作者对灰体辐射输运方程和多群辐射输运方程设计了非结构网格上渐近保持的 UGKS [28] 和柱坐标系下渐近保持的 UGKS [29]. 为了提高实际问题计算效率, 通过设计隐式依赖于未知解的边界数值通量, 文献 [30, 31] 构造了隐式渐近保持的 UGKS [30, 31], 去除了 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件对光子自由程的依赖性.

需要指出的是, 上面提到的 UGKS 都是基于离散纵标法 ( $S_N$ ) 对角度离散而建立的. 离散纵标法由于其实现简单、计算效率高等特点, 因而是求解辐射输运方程最常用的角度变量离散方法之一. 但由于其角度变量离散不具有旋转不变性, 因而对存在孤立点源、强吸收和弱散射介质, 解会出现非物理振荡, 也称为射线效应. 结合角度有限元/ $FP_N$  (filtered  $P_N$ ) 方法 [32-34] 和 UGKS 方法的优点, 对辐射输运方程与物质温度方程耦合的情形, 文献 [35] 建立了能有效抑制射线效应且具有渐近保持性质的格式, 同时解决  $FP_N$  求解时辐射能量密度和物质温度仍可能出现负值的问题, 得到了保正的  $FP_N$  (positive preserving filter  $P_N$ , PFP $P_N$ ) 格式.

此外, 辐射流体力学方程组由可压缩流体力学方程和辐射传输方程强耦合构成. 首先, 流体运动影响着辐射光子在背景流体中的传输, 其具体表现为辐射传输方程中的碰撞项变得极为复杂, 通常需要利用考虑相对论效应的 Lorentz 变换才能精确得到. 其次, 辐射效应对背景流体的运动过程也有非常重要的影响, 特别当辐射动量沉积项对流体运动速度的影响不可忽略时, 需要考虑辐射压力张量对流体运动方程的影响. 辐射输运的 UGKS 方法中未知量辐射强度量与物质温度量定义的位置一致, 都是定义在网格中心, 克服了文献 [22] 中所指出的高阶格式中由于未知量定义位置不一致而导致与流体力学计算耦合后使得整个辐射流体力学方程渐近性质缺失的问题. 因此, 辐射输运的 UGKS 方法与通常的流体力学程序耦合后, 能够保持整个辐射流体力学方程的渐近性质.

在本综述中, 第 2 节详细介绍如何将 UGKS 拓展到灰体辐射输运方程组并给出格式的渐近分析; 第 3 节结合角度有限元和球谐函数展开方法, 介绍如何减弱基于离散纵标法的 UGKS 的射线效应; 第 4 节研究考虑流体运动的辐射流体力学方程组, 并介绍如何结合辐射输运 UGKS, 将其拓展到辐射流体力学方程组中; 第 5 节结合典型的数值算例来展示 UGKS 及其拓展格式在辐射输运方程 (组) 计算方面的性能和效率; 第 6 节给出总结和展望.

## 2 灰体辐射输运方程

灰体辐射输运方程的无量纲化形式可以表示为

$$\frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \epsilon \Omega \cdot \nabla I = \sigma \left( \frac{1}{4\pi} acT^4 - I \right), \quad (2.1a)$$

$$\epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \left( \int_{S^2} I d\Omega - acT^4 \right), \quad (2.1b)$$

其中  $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$  为辐射强度,  $T(\mathbf{r}, t)$  为物质温度,  $\sigma(\mathbf{r}, T)$  为背景介质的不透明度系数 (通常依赖于物质温度  $T$ ),  $a$  为输运常数,  $c$  为光速,  $\epsilon > 0$  为 Knudsen 数,  $C_\nu(\mathbf{r}, t)$  为比热.  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  和  $t$  分别为空间和时间变量,  $\boldsymbol{\Omega} \in S^2$  (单位球面) 为辐射光子的角度传播变量.

方程 (2.1) 是辐射强度在局部热力学平衡下的松弛模型, 其中背景介质是以局部温度下的 Planck 函数  $\frac{1}{4\pi} acT^4$  来发射光子源.

当参数  $\epsilon \rightarrow 0$  时, Larsen 和 Morel<sup>[8]</sup> 证明了在远离边界处和初始层, 辐射强度  $I$  会收敛到关于局部温度的 Planck 函数, 即

$$I^{(0)} = \frac{1}{4\pi} ac(T^{(0)})^4,$$

且相应的局部温度  $T^{(0)}$  满足下面的非线性扩散方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_\nu T^{(0)}) + a \frac{\partial}{\partial t}(T^{(0)})^4 = \nabla \cdot \frac{ac}{3\sigma} \nabla(T^{(0)})^4. \quad (2.2)$$

求解灰体辐射输运方程 (2.1) 的渐近保持数值格式即为这样的格式: 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 输运方程的数值离散格式会收敛到相应扩散极限方程 (2.2) 的数值离散格式.

在辐射输运渐近保持 UGKS 的构造中, 对角度变量  $\boldsymbol{\Omega}$  采用离散纵标方法来离散. 为叙述简单起见, 对方程 (2.1), 考虑平面二维笛卡尔坐标系下的情形. 此时, 光子传播方向可以写为  $\boldsymbol{\Omega} = (\mu, \xi)$ , 其中  $\mu = \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \theta$ ,  $\xi = \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \theta$ ,  $\zeta \in [-1, 1]$  为光子传播方向与  $Z$  轴夹角的余弦值.  $\theta$  为光子传播方向在  $XY$ - 平面上的投影方向与  $X$  轴的夹角.

为方便起见, 在下面的部分记  $\phi = acT^4$ .

## 2.1 角度变量的离散

在离散纵标方法中, 将光子的传播方向  $\boldsymbol{\Omega} = (\mu, \xi)$  离散为有限个方向. 如文献 [36] 所示, 对给定的正偶数  $N$ , 则得到总离散方向数  $M = N(N + 2)/2$ . 记  $\boldsymbol{\Omega}_m = (\mu_m, \xi_m)$  和  $\omega_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) 分别为相应的离散方向和积分权重系数, 则对方程 (2.1) 角度离散后可得到

$$\frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial I_m}{\partial t} + \epsilon \boldsymbol{\Omega}_m \cdot \nabla I_m = \sigma \left( \frac{1}{4\pi} acT^4 - I_m \right), \quad (2.3a)$$

$$\epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \left( \sum_{m=1}^M I_m \omega_m - acT^4 \right). \quad (2.3b)$$

## 2.2 空间和时间变量的离散

首先对方程 (2.3b) 进行如下的变换: 令物质内能为  $U$ , 且满足  $\frac{\partial U}{\partial t} = C_\nu(T) \frac{\partial T}{\partial t}$ . 再结合  $\phi = acT^4$  可得

$$\beta(x, t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial U} = \frac{d\phi}{dT} \frac{dT}{dU} = \frac{4acT^3}{C_\nu(T)},$$

则 (2.3b) 可改写为

$$\epsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta \sigma \left( \sum_{m=1}^M I_m \omega_m - \phi \right). \quad (2.4)$$

设  $x_i = i\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$  和  $t^n = n\Delta t$  ( $i, j, n \in \mathbb{Z}$ ) 为笛卡尔坐标系下的一致剖分网格, 其中  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  和  $\Delta t$  分别为  $x$ -、 $y$ - 和  $t$ - 方向上的网格步长. 进一步, 令  $(i, j)$  表示空间网格  $\{(x, y); x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}, y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}\}$ , 其中  $x_{i-1/2} = (i - \frac{1}{2})\Delta x$  和  $y_{j-1/2} = (j - \frac{1}{2})\Delta y$  表示网格边界. 为了给出方程 (2.3) 和 (2.4) 的空间和时间离散格式, 记  $I_{i,j,m}^n$  为时刻  $t^n$  辐射强度  $I_m$  在空间网格  $(i, j)$  上的积分平均值, 并记网格  $(i, j)$  相应的网格中心坐标为  $(x_i, y_j)$ , 则对方程 (2.3) 和 (2.4) 在空间网格  $(i, j)$  上对时间变量从  $t^n$  到  $t^n + \Delta t$  积分, 可得到如下的有限体积守恒离散格式:

$$I_{i,j,m}^{n+1} = I_{i,j,m}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i-1/2,j,m} - F_{i+1/2,j,m}) + \frac{\Delta t}{\Delta y}(H_{i,j-1/2,m} - H_{i,j+1/2,m}) + c\Delta t \left\{ \frac{\sigma}{\epsilon^2} \left( \frac{1}{2\pi} \tilde{\phi}_{i,j} - \tilde{I}_{i,j,m} \right) \right\}, \quad (2.5a)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \frac{(\beta\sigma)_{i,j}^{n+1} \Delta t}{\epsilon^2} \left( \sum_{m=1}^M \tilde{I}_{i,j,m} \omega_m - \tilde{\phi}_{i,j} \right), \quad (2.5b)$$

其中  $F_{i\pm 1/2,j,m}$  和  $H_{i,j\pm 1/2,m}$  分别为  $x$ - 和  $y$ - 方向网格边界上依赖于时间的数值通量. 方程 (2.5a) 中右端各项分别为

$$F_{i\pm 1/2,j,m} = \frac{c}{\epsilon\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mu_m I_m(t, x_{i\pm 1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m) dt, \quad (2.6a)$$

$$H_{i,j\pm 1/2,m} = \frac{c}{\epsilon\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \xi_m I_m(t, x_i, y_{j\pm 1/2}, \mu_m, \xi_m) dt, \quad (2.6b)$$

$$\tilde{\phi}_{i,j} = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi(t, x, y) dx dy dt, \quad (2.6c)$$

$$\tilde{I}_{i,j,m} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} I_m(t, x, y, \mu_m, \xi_m) dx dy dt. \quad (2.6d)$$

为了求解方程 (2.5), 需要给出 (2.6) 中各项的具体形式. 首先, 为了降低方程求解的刚性, (2.5)、(2.6c) 和 (2.6d) 中的  $\tilde{\phi}_{i,j}$  和  $\tilde{I}_{i,j,m}$  两项可以用隐式给出, 即

$$\tilde{\phi}_{i,j} = \phi_{i,j}^{n+1}, \quad \tilde{I}_{i,j,m} \approx I_{i,j,m}^{n+1}.$$

此外, (2.6) 中数值通量  $F_{i\pm 1/2,j,m}$  和  $H_{i,j\pm 1/2,m}$  的具体表达式将在下一小节中给出.

### 2.3 边界数值通量的构造

数值通量  $F_{i\pm 1/2,j,m}$  和  $H_{i,j\pm 1/2,m}$  的具体构造方法是 UGKS 方法的核心. 下面以左边界  $x = x_{i-1/2}$ ,  $y = y_j$  上的流通量  $F_{i-1/2,j,m}$  为例, 说明如何构造流通量  $F_{i-1/2,j,m}$ . 根据 (2.6a) 可知, 需要给出对应网格边界上的辐射强度  $I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m)$  的值. 为此, 在网格边界附近求解如下的方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{c} \partial_t I_m + \mu_m \partial_x I_m = \frac{\sigma}{\epsilon} \left( \frac{1}{2\pi} \phi - I_m \right), \\ I_m(x, y_j, t) |_{t=t^n} = I_{m,0}(x, y_j, t^n). \end{cases} \quad (2.7)$$

容易看出, 方程 (2.7) 的时间演化解为

$$I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m) = e^{-\nu_{i-1/2,j}(t-t^n)} I_{m,0} \left( x_{i-1/2} - \frac{c\mu_m}{\epsilon} (t - t^n) \right)$$

$$+ \int_{t^n}^t e^{-\nu_{i-1/2,j}(t-s)} \frac{c\sigma_{i-1/2,j}}{2\pi\epsilon^2} \phi\left(s, x_{i-1/2} - \frac{c\mu_m}{\epsilon}(t-s)\right) ds, \quad (2.8)$$

其中记  $\nu = c\sigma/\epsilon^2$ , 则  $\nu_{i-1/2,j}$  表示  $\nu$  在相应左网格边界上的值. 这里需要指出的是,  $\sigma$  通常是温度  $T$  的非线性函数. 因此, 参数  $\nu$  非线性地依赖于物质温度  $T$ .

如果将 (2.8) 中  $I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m)$  的表达式代入到 (2.6a) 中, 并关于时间变量  $t$  从  $t^n$  到  $t^{n+1}$  积分后可得到  $x$ - 方向左边界上的数值通量  $F_{i-1/2,j,m}$ . 其他的边界数值通量, 如  $x$ - 方向右边界上的  $F_{i+1/2,j,m}$  和  $y$ - 方向上的  $H_{i,j\pm 1/2,m}$ , 可同样构造.

为了完全给出 (2.8) 中解的表达式, 还需要给出式中的两个未知量. 第一个是网格边界  $(x_{i-1/2}, y_j)$  附近的辐射强度  $I_m(t, x, y_j)$  在  $t^n$  时刻的值, 即式中的初始值  $I_{m,0}(x, y_j, t^n)$ ; 第二个是网格边界  $(x_{i-1/2}, y_j)$  附近函数  $\phi(t, x, y)$  在时间  $t^n$  到  $t^{n+1}$  上的值.

对于 (2.7) 中的初始值  $I_{m,0}(x, y_j, t^n)$ , 用下面的分片线性多项式来重构:

$$I_{m,0}(x, y_j, t^n) = \begin{cases} I_{i-1,j,m}^n + \delta_x I_{i-1,j,m}^n (x - x_{i-1}), & x < x_{i-1/2}, \\ I_{i,j,m}^n + \delta_x I_{i,j,m}^n (x - x_i), & x > x_{i-1/2}, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中  $\delta_x I_{i-1,j,m}^n$  和  $\delta_x I_{i,j,m}^n$  为空间导数 (可用差商近似), 并使用二阶的 MUSCL (monotone upwind scheme for conservation laws) 限制子<sup>[37]</sup> 以抑止可能的数值振荡.

对函数  $\phi(x, y_j, t)$ , 在时间区间  $(t^n, t^{n+1})$  内, 用分片连续多项式在网格边界  $(x_{i-1/2}, y_j)$  附近进行重构:

$$\phi(x, y_j, t) = \phi_{i-1/2,j}^{n+1} + \delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} (t - t^{n+1}) + \begin{cases} \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} (x - x_{i-1/2}), & x < x_{i-1/2}, \\ \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} (x - x_{i-1/2}), & x > x_{i-1/2}, \end{cases} \quad (2.10)$$

其中  $\phi_{i-1/2,j}^{n+1} = (\phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n+1})/2$  为网格边界上的值, 相应的左和右单边导数的定义为

$$\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x/2}, \quad \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x/2};$$

对时间导数  $\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1}$ , 使用向前差分:

$$\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^n}{\Delta t}.$$

所以, 利用上面的重构方法, 数值通量

$$F_{i-1/2,j,m} = \frac{c\mu_m}{\epsilon\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m) dt$$

的表达式可以由 (2.8)–(2.10) 给出, 通过计算可得

$$\begin{aligned} F_{i-1/2,j,m} &= A_{i-1/2,j} \mu_m (I_{i-1/2,j,m}^- 1_{\mu_m > 0} + I_{i-1/2,j,m}^+ 1_{\mu_m < 0}) + C_{i-1/2,j} \mu_m \phi_{i-1/2,j}^{n+1} \\ &+ D_{i-1/2,j} (\mu_m^2 \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} 1_{\mu_m > 0} + \mu_m^2 \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} 1_{\mu_m < 0}) \\ &+ B_{i-1/2,j} (\mu_m^2 \delta_x I_{i-1,j,m}^n 1_{\mu_m > 0} + \mu_m^2 \delta_x I_{i,j,m}^n 1_{\mu_m < 0}) \\ &+ E_{i-1/2,j} \mu_m \delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中  $I_{i-1/2,j,m}^-$  和  $I_{i-1/2,j,m}^+$  表示网格边界上的值, 具体形式为

$$I_{i-1/2,j,m}^- = I_{i-1,j,m} + \frac{\Delta x}{2} \delta_x I_{i-1,j,m}^n, \quad I_{i-1/2,j,m}^+ = I_{i,j,m} - \frac{\Delta x}{2} \delta_x I_{i,j,m}^n,$$

并且方程 (2.11) 中的系数分别由下面的函数给出:

$$\begin{aligned} A(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) &= \frac{c}{\epsilon \Delta t \nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}), \\ C(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) &= \frac{c^2 \sigma}{2\pi \Delta t \epsilon^3 \nu} \left( \Delta t - \frac{1}{\nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}) \right), \\ D(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) &= -\frac{c^3 \sigma}{2\pi \Delta t \epsilon^4 \nu^2} \left( \Delta t (1 + e^{-\nu \Delta t}) - \frac{2}{\nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}) \right), \\ B(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) &= -\frac{c^2}{\epsilon^2 \nu^2 \Delta t} (1 - e^{-\nu \Delta t} - \nu \Delta t e^{-\nu \Delta t}), \\ E(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) &= \frac{c^2 \sigma}{2\pi \epsilon^3 \nu^3 \Delta t} \left( 1 - e^{-\nu \Delta t} - \nu \Delta t e^{-\nu \Delta t} - \frac{1}{2} (\nu \Delta t)^2 \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中  $\nu = c\sigma/\epsilon^2$ . 需要指出的是, 为了得到输运方程和扩散极限方程相容的边界数值通量, 在 (2.11) 中,  $\sigma$  在边界上的取值为  $\sigma_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{2\sigma_{i,j}^{n+1}\sigma_{i-1,j}^{n+1}}{\sigma_{i,j}^{n+1} + \sigma_{i-1,j}^{n+1}}$ .

从 (2.11) 中可以看出, 为了对辐射输运方程进行求解, 需要首先确定其中的宏观量  $\phi_{i,j}^{n+1}$  的值. 在 UGKS 方法中, 它通过求解一个宏观辅助方程得到. 接下来的小节将给出宏观量  $\phi_{i,j}^{n+1}$  的具体构造过程.

### 2.4 宏观辅助方程的求解

本小节给出 (2.10) 中  $\phi(x, y_j, t)$  的计算方法. 定义  $\rho = \int I d\vec{\Omega}$ . 注意到  $\phi = acT^4$ , 对方程 (2.1a) 关于角度积分后可得如下的宏观辅助方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \nabla \cdot \langle \vec{\Omega} I \rangle = \sigma(\phi - \rho), \\ \epsilon^2 C_v \frac{\partial T}{\partial t} \equiv \epsilon^2 \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma(\rho - \phi), \end{cases} \tag{2.13}$$

其中角度积分  $\langle \vec{\Omega} I \rangle$  的定义为

$$\langle \vec{\Omega} I \rangle := \int \vec{\Omega} I d\vec{\Omega}.$$

为得到 (2.13) 中关于宏观量  $\rho$  和  $\phi$  封闭的方程组, 采用与前面第 2.2 小节中同样的处理办法. 利用

$$\beta(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial U} = \frac{d\phi}{dT} \frac{dT}{dU} = \frac{4acT^3}{C_v(T)}, \tag{2.14}$$

(2.13) 可以改写为

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \nabla \cdot \langle \vec{\Omega} I \rangle = \sigma(\phi - \rho), \\ \epsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta \sigma(\rho - \phi). \end{cases} \tag{2.15}$$

注意到  $i, j$  和  $n$  表示用一致步长  $\Delta x, \Delta y$  和  $\Delta t$  来离散的空间和时间方向上的计算网格. 因此, 对 (2.15) 用有限体积格式进行离散后可以得到

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \Phi_{i+1/2,j}^{n+1}) \\ \quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Psi_{i,j-1/2}^{n+1} - \Psi_{i,j+1/2}^{n+1}) + \frac{\sigma_{i,j}^{n+1} c \Delta t}{\epsilon^2} (\phi_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n+1}), \\ \phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \frac{(\beta\sigma)_{i,j}^{n+1} \Delta t}{\epsilon^2} (\rho_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n+1}), \end{cases} \quad (2.16)$$

其中网格边界上的宏观流通量为

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2,j}^{n+1} &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \langle \Omega_x I \rangle (x_{i-1/2}, y_j, t) dt, \\ \Phi_{i+1/2,j}^{n+1} &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \langle \Omega_x I \rangle (x_{i+1/2}, y_j, t) dt, \\ \Psi_{i,j-1/2}^{n+1} &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \langle \Omega_y I \rangle (x_i, y_{j-1/2}, t) dt, \\ \Psi_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \langle \Omega_y I \rangle (x_i, y_{j+1/2}, t) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

对 (2.17) 中的宏观边界通量, 如  $x$ - 方向上的左边界流, 利用 (2.8) 和 (2.11) 可得

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2,j}^{n+1} &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \langle \Omega_x I \rangle (x_{i-1/2}, y_j, t) dt = \sum_{m=1}^M \omega_m F_{i-1/2,j,m} \\ &= A_{i-1/2,j}^{n+1} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m (I_{i-1,j,m}^n \mathbf{1}_{\mu_m > 0} + I_{i,j,m}^n \mathbf{1}_{\mu_m < 0}) + \frac{2\pi D_{i-1/2,j}^{n+1}}{3} \left( \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ &\quad + B_{i-1/2,j}^{n+1} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m^2 (\delta_x I_{i-1,j,m}^n \mathbf{1}_{\mu_m > 0} + \delta_x I_{i,j,m}^n \mathbf{1}_{\mu_m < 0}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中系数  $A_{i-1/2,j}^{n+1}$ 、 $B_{i-1/2,j}^{n+1}$  和  $D_{i-1/2,j}^{n+1}$  同 (2.11) 中的系数  $A_{i-1/2,j}$ 、 $B_{i-1/2,j}$  和  $D_{i-1/2,j}$ . 用同样方法可得到其他的边界通量  $\Phi_{i+1/2,j}^{n+1}$ 、 $\Psi_{i,j-1/2}^{n+1}$  和  $\Psi_{i,j+1/2}^{n+1}$ .

一旦有了这些宏观边界通量的表达式, 方程组 (2.16) 构成了一个关于宏观量  $\phi_{i,j}^{n+1}$  和  $\rho_{i,j}^{n+1}$  的封闭方程组, 而其中的参数  $\sigma_{i,j}^{n+1}$  和  $\beta_{i,j}^{n+1}$  隐式依赖于物质温度  $T_{i,j}^{n+1}$ . 这个宏观非线性方程可以由迭代方法进行数值求解.

## 2.5 介观方程的求解

在得到宏观量  $\phi_{i,j}^{n+1}$  以后, 可得到 (2.10) 中网格边界上  $\phi_{i-1/2,j}^{n+1}$  的值为

$$\phi_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n+1}). \quad (2.19)$$

(2.11) 中辐射参数  $\sigma_{i-1/2,j}$  由上面宏观方程更新后的物质温度  $T_{i,j}^{n+1}$  确定, 即

$$\sigma_{i-1/2,j}^{n+1} = 2\sigma_{i,j}^{n+1} \sigma_{i-1,j}^{n+1} / (\sigma_{i,j}^{n+1} + \sigma_{i-1,j}^{n+1}).$$



到此为止, (2.5a) 中的边界流通量的表达式已完全得到, 例如,  $F_{i-1/2,j}$  可由 (2.11) 给出. 用同样的方式可给出其他的流通量  $F_{i+1/2,j}$ 、 $H_{i,j-1/2}$  和  $H_{i,j+1/2}$ . 因此, (2.5a) 可由下面的格式求解:

$$I_{i,j,m}^{n+1} = I_{i,j,m}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1/2,j} - F_{i+1/2,j}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (H_{i,j-1/2} - H_{i,j+1/2}) + \frac{c\Delta t\sigma_{i,j}^{n+1}}{\epsilon^2} \left( \frac{1}{2\pi} \phi_{i,j}^{n+1} - I_{i,j,m}^{n+1} \right). \quad (2.20)$$

最后给出 (2.5b) 中物质温度的求解. 在得到  $I_{i,j,m}^{n+1}$  的新值以后, 首先更新

$$\bar{\phi}_{i,j}^{n+1} = \frac{\phi_{i,j}^n + \Delta t(\beta\sigma)_{i,j}^{n+1} \sum_{m=1}^M \omega_m I_{i,j,m}^{n+1} / \epsilon^2}{1 + \Delta t(\beta\sigma)_{i,j}^{n+1} / \epsilon^2}. \quad (2.21)$$

基于 (2.21), 立即得到新时刻的物质温度值  $\hat{T}_{i,j}^{n+1} = (\bar{\phi}_{i,j}^{n+1} / (ac))^{1/4}$ . 这完成了灰体辐射输运方程 (2.5) 的 UGKS 方法的构造. 接下来的小节将给出渐近保持性质的证明.

## 2.6 渐近保持性质的证明

上述的 UGKS 在  $\epsilon$  趋于 0 时的极限是由下面命题中系数的极限性质决定的.

**命题 1** [11] 设  $\sigma$  为正的实数, 则当  $\epsilon$  趋于 0 时, 有

- $A(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) \rightarrow 0$ ;
- $B(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) \rightarrow 0$ ;
- $D(\Delta t, \epsilon, \sigma, \nu) \rightarrow -c/(2\pi\sigma)$ .

因此, 宏观辅助方程 (2.16) 中相应的边界数值流通量, 如  $\Phi_{i-1/2,j}^{n+1}$ , 满足

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2,j}^{n+1} &= \left\langle \frac{c\mu}{\epsilon\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} I(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu, \xi) dt \right\rangle \\ &= \int \frac{c\mu}{2\pi\epsilon\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} I(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu, \xi) dt d\mu d\xi, \end{aligned} \quad (2.22)$$

且有下面的极限形式:

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1/2,j}^{n+1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} - \left( \frac{c}{6\sigma_{i-1/2,j}} \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} + \frac{c}{6\sigma_{i-1/2,j}} \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} \right) \\ &= - \frac{c}{3\sigma_{i-1/2,j}} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

下面的命题 2 给出了所构造格式的渐近保持性质的证明.

**命题 2** 设  $\sigma$  和  $\alpha$  为正的实数, 则当  $\epsilon$  趋于 0 时, 由 (2.16)、(2.20) 和 (2.21) 组成的灰体辐射输运方程的数值格式收敛到其扩散极限方程 (2.2) 相应的隐式扩散格式.

**证明** 首先, 对方程 (2.20) 中的  $\epsilon^{-2}$  项, 当参数  $\epsilon$  趋于 0 时, 有

$$I_{i,j,m}^{n+1} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \phi_{i,j}^{n+1}.$$

如果对上式关于角度变量积分, 则当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 有

$$\rho_{i,j}^{n+1} \rightarrow \phi_{i,j}^{n+1} = ac(T_{i,j}^{n+1})^4. \quad (2.24)$$

其次, 对 (2.20) 中的  $\epsilon^{-1}$  项, 如 (2.11) 中给定的流通量  $F_{i-1/2,j,m}$ , 如果对此流通量  $F_{i-1/2,j,m}$  进行角度积分, 则可得到 (2.18) 中的宏观流通量  $\Phi_{i-1/2,j}^{n+1}$ . 由命题 1 知, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 有

$$\Phi_{i-1/2,j}^{n+1} \rightarrow -\frac{c}{3\sigma_{i-1/2,j}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}. \quad (2.25)$$

同样地, 当参数  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 对其他的宏观流通量也有

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1/2,j}^{n+1} &\rightarrow -\frac{c}{3\sigma_{i+1/2,j}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x}, \\ \Psi_{i,j-1/2}^{n+1} &\rightarrow -\frac{c}{3\sigma_{i,j-1/2}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y}, \\ \Psi_{i,j+1/2}^{n+1} &\rightarrow -\frac{c}{3\sigma_{i,j+1/2}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

最后, 如果将方程 (2.20) 和 (2.21) 相加, 并对最终的式子关于角度积分后取极限  $\epsilon \rightarrow 0$ , 则得

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} &\left( -\frac{c}{3\sigma_{i-1/2,j}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{c}{3\sigma_{i+1/2,j}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( -\frac{c}{3\sigma_{i,j-1/2}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{c}{3\sigma_{i,j+1/2}^{n+1}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y} \right) - c \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\beta_{i,j}^{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

所以, 由 (2.24) 可以看出, 离散格式 (2.27) 是扩散极限方程 (2.2) 的一个标准的五点格式. 这证明了由 (2.16)、(2.20) 和 (2.21) 组成的灰体辐射输运方程 (2.1) 的离散格式具有渐近保持性质.  $\square$

## 2.7 UGKS 方法的进一步拓展与改进

灰体辐射输运方程 (2.1) 的渐近保持 UGKS 可以拓展到更为复杂的辐射输运情形, 例如, 考虑辐射强度依赖于光子频率的情形. 通过对频率变量进行离散得到多群近似的辐射输运方程, 并引入相应的多群宏观辅助方程, 可构造出多群辐射输运方程的渐近保持 UGKS, 该方面的研究结果参见文献 [12]. 在光性厚介质区, 除了强吸收 (吸收系数比较大) 的情形, 还有强散射 (散射系数比较大) 的情形. 而对强散射情形, 辐射输运方程收敛到非平衡扩散极限方程, 即辐射温度与物质温度达不到平衡, 两者之间存在能量交换. UGKS 方法也可推广到这种强散射情形, 可证明该格式能够收敛到非平衡扩散极限方程的解, 该方面的研究结果参见文献 [30]. 文献 [28] 发展了非结构网格上的渐近保持 UGKS. 同时, 柱坐标系下的渐近保持 UGKS 可参见文献 [29]. 为了进一步提高计算效率, 通过用隐式方法来重构辐射强度的初始值, 发展了隐式的渐近保持 UGKS 方法 (参见文献 [31]).

## 3 辐射输运方程的射线效应消除方法

在辐射输运方程离散纵标法 ( $S_N$ ) 的实际应用中, 射线效应是一个长期未得到有效解决的难题. 而采用角度有限元或基于球谐函数展开的  $FP_N$  (滤波) 方法能有效消除或减弱离散纵标法中的射线效

应. 本节结合上面的多尺度的 UGKS, 结合角度有限元和  $FP_N$  (滤波) 方法, 建立能有效抑制或消除射线效应的辐射输运方程渐近保持数值格式. 特别地, 针对  $FP_N$  得到的宏观方程解 (即辐射能量密度和物质温度值) 可能出现负值的问题, 通过添加保正限制器等得到了严格保正的格式. 本节还以平面二维下的灰体辐射输运方程 (2.2) 为例来说明格式的构造方法. 与上一节中角度离散纵标法 ( $S_N$ ) 方法的主要区别在于角度方向的离散, 其他计算过程 (对空间和时间变量) 可类似处理.

### 3.1 角度有限元离散

本小节用极角的余弦  $\zeta$  和方位角  $\theta$  来描述角度变量  $\Omega$ . 由二维笛卡尔空间上光子传播角度方向的对称性可知, 我们只需考虑变量  $\zeta \geq 0$  的情形, 即需考虑的角度区域为

$$\bar{S}^2 = [0, 1] \times [0, 2\pi] = \{(\zeta, \theta) \mid 0 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

为了精确确定角度的入射方向, 首先将角度区域  $\bar{S}^2 = [0, 1] \times [0, 2\pi]$  划分为如下的 4 个子区域:

$$\bar{S}_1^2 = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \bar{S}_2^2 = [0, 1] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \bar{S}_3^2 = [0, 1] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \bar{S}_4^2 = [0, 1] \times \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right],$$

并对 4 个子区域独立进行处理, 即对 4 个子区域分别进行离散, 对相邻子区域的公共边界不强加连续性要求.

对区域  $\bar{S}_m^2$  进行协调三角形网格剖分, 令  $V_{h,m}$  为其上的连续线性有限元空间. 记  $N_m$  为空间  $V_{h,m}$  的维数,  $\{\psi_{k,m}\}_{k=1}^{N_m}$  为空间的一组基, 则角度有限元 (finite element, FE) 离散, 即寻找函数  $I(\mathbf{r}, \Omega, t)$  在空间  $V_{h,m}$  中的近似:

$$I(\mathbf{r}, \Omega, t)|_{\bar{S}_m^2} \approx \sum_{k=1}^{N_m} I_{k,m}(\mathbf{r}, t)\psi_{k,m}(\zeta, \theta), \tag{3.1}$$

其中  $I_{k,m}(\mathbf{r}, t)$  由如下弱问题确定:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{c} \sum_{k=1}^{N_m} \partial_t I_{k,m} \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{k,m} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta + \iint_{\bar{S}_m^2} (\mu \partial_x I + \xi \partial_y I) \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \\ = \frac{\sigma}{\epsilon} \left( \frac{1}{2\pi} acT^4 \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta - \sum_{k=1}^{N_m} I_{k,m} \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{k,m} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right), \quad \forall \psi_{\ell,m} \in V_{h,m}, \\ \epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \left( \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^{N_m} I_{k,m} \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{k,m} d\zeta d\theta - acT^4 \right). \end{cases} \tag{3.2}$$

令

$$\begin{aligned} \vec{I}_m &= (I_{1,m}, I_{2,m}, \dots, I_{N_m,m})^T, \\ A_m &= \left( \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{k,m} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times N_m}, \quad D_m = \left( \iint_{\bar{S}_m^2} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times 1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中  $(\cdot)^T$  为向量的转置, 则对  $m = 1, 2, 3, 4$ , 方程 (3.2) 可改写为如下的形式:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} A_m \partial_t \vec{I}_m + \left( \iint_{\bar{S}_m^2} (\mu \partial_x I + \xi \partial_y I) \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times 1} &= \frac{\sigma}{\epsilon} \left( \frac{1}{2\pi} acT^4 D_m - A_m \vec{I}_m \right), \\ \epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} &= \sigma \left( \sum_{m=1}^4 D_m^T \vec{I}_m - acT^4 \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

从而完成了方程 (2.1) 的角度离散.

### 3.1.1 空间和时间离散

对方程 (3.4) 关于空间单元  $(i, j)$  和时间区间  $(t_n, t_{n+1})$  积分可得如下的有限体积离散形式:

$$\begin{cases} \vec{I}_{i,j,m}^{n+1} = \vec{I}_{i,j,m}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{F}_{i-1/2,j,m} - \vec{F}_{i+1/2,j,m}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\vec{H}_{i,j-1/2,m} - \vec{H}_{i,j+1/2,m}) \\ \quad + \frac{c\sigma_{i,j}^{n+1}}{\epsilon^2} \Delta t \left( \frac{1}{2\pi} A_m^{-1} D_m \tilde{\phi}_{i,j} - \tilde{I}_{i,j,m} \right), \quad m = 1, 2, 3, 4, \\ C_\nu T_{i,j}^{n+1} = C_\nu T_{i,j}^n + \Delta t \frac{\sigma_{i,j}^{n+1}}{\epsilon^2} \left( \sum_{m=1}^4 D_m^T \tilde{I}_{i,j,m} - \tilde{\phi}_{i,j} \right), \end{cases} \quad (3.5)$$

其中

$$\vec{F}_{i-1/2,j,m} = \frac{c}{\epsilon \Delta t} A_m^{-1} \left( \int_{t_n}^{t_{n+1}} \iint_{\bar{S}_m^2} \mu \psi_{\ell,m} I(x_{i-1/2}, y_j, \mathbf{\Omega}, t) d\zeta d\theta dt \right)_{N_m \times 1}, \quad (3.6a)$$

$$\vec{H}_{i,j-1/2,m} = \frac{c}{\epsilon \Delta t} A_m^{-1} \left( \int_{t_n}^{t_{n+1}} \iint_{\bar{S}_m^2} \xi \psi_{\ell,m} I(x_i, y_{j-1/2}, \mathbf{\Omega}, t) d\zeta d\theta dt \right)_{N_m \times 1}, \quad (3.6b)$$

$$\tilde{\phi}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi(x, y, t) dx dy dt, \quad (3.6c)$$

$$\tilde{I}_{i,j,m} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \vec{I}_m(x, y, t) dx dy dt. \quad (3.6d)$$

首先, (3.6) 中的  $\tilde{\phi}_{i,j}$  和  $\tilde{I}_{i,j,m}$  可用如下的方式隐式近似:

$$\tilde{\phi}_{i,j} = \phi_{i,j}^{n+1}, \quad \tilde{I}_{i,j,m} \approx \vec{I}_{i,j,m}^{n+1}. \quad (3.7)$$

我们将在接下来的小节中处理 (3.6) 中的流通量  $\vec{F}_{i-1/2,j,m}$  和  $\vec{H}_{i,j-1/2,m}$ .

### 3.1.2 数值通量的构造

本小节考虑界面数值通量  $\vec{F}_{i-1/2,j,m}$  和  $\vec{H}_{i,j-1/2,m}$  的构造方法. 以  $\vec{F}_{i-1/2,j,m}$  为例, 由 (3.6a) 可知, 只要建立了  $I(x_{i-1/2}, y_j, \mathbf{\Omega}, t)$  在角度区域  $\bar{S}_m^2$ 、单元界面  $(x_{i-1/2}, y_j)$  和时间区间  $(t_n, t_{n+1})$  上的近似,  $\vec{F}_{i-1/2,j,m}$  便可直接得到. 用类似于第 2 节中 UGKS 的构造思想, 在角度区域  $\bar{S}_m^2$  和单元界面  $x = x_{i-1/2}, y = y_j$  处, 考虑如下的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial I_m}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_m}{\partial x} = \frac{\sigma_{i-1/2,j}}{\epsilon} \left( \frac{1}{2\pi} \phi - I_m \right), \\ I_m(x, y_j, \mathbf{\Omega}, t) |_{t=t_n} = I_m^0(x, y_j, \mathbf{\Omega}), \end{cases} \quad (3.8)$$

其中  $\sigma_{i-1/2,j}$  为  $\sigma$  在时刻  $t_{n+1}$  及相应界面处的近似值, 它为一个常量.

问题 (3.8) 的积分解为

$$\begin{aligned} I_m(x_{i-1/2}, y_j, \mathbf{\Omega}, t) &= e^{-\nu_{i-1/2,j}(t-t_n)} I_m^0 \left( x_{i-1/2} - \frac{c\mu}{\epsilon} (t-t_n), y_j, \mathbf{\Omega} \right) \\ &\quad + \int_{t_n}^t e^{-\nu_{i-1/2,j}(t-s)} \frac{c\sigma_{i-1/2,j}}{2\pi\epsilon^2} \phi \left( x_{i-1/2} - \frac{c\mu}{\epsilon} (t-s), y_j, s \right) ds, \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $\nu = c\sigma/\epsilon^2$ .

为确定 (3.9) 以获得数值通量的表达式, 需给出初始值  $I_m^0(x, y_j, \Omega)$  在角度区域  $\bar{S}_m^2$  和单元界面  $(x_{i-1/2}, y_j)$  处的近似, 以及函数  $\phi(x, y_j, t)$  在单元界面  $(x_{i-1/2}, y_j)$  和时间区间  $(t_n, t_{n+1})$  上的近似. 在 UGKS 中主要通过重构的方式得到.

针对初始值  $I_m^0(x, y_j, \Omega)$ , 对角度变量用分片线性元、空间变量用分片常数进行重构, 形式如下:

$$I_m^0(x, y_j, \Omega) = \begin{cases} (\psi_{1,m}, \psi_{2,m}, \dots, \psi_{N_m,m}) \bar{I}_{i-1,j,m}^n, & \text{若 } x < x_{i-1/2}, \\ (\psi_{1,m}, \psi_{2,m}, \dots, \psi_{N_m,m}) \bar{I}_{i,j,m}^n, & \text{若 } x > x_{i-1/2}. \end{cases} \quad (3.10)$$

对函数  $\phi(x, y_j, t)$ , 空间和时间变量都用分片线性重构 (即时空变量的一阶 Taylor 展开):

$$\phi(x, y_j, t) = \phi_{i-1/2,j}^{n+1} + \delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} (t - t_{n+1}) + \begin{cases} \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} (x - x_{i-1/2}), & \text{若 } x < x_{i-1/2}, \\ \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} (x - x_{i-1/2}), & \text{若 } x > x_{i-1/2}, \end{cases} \quad (3.11)$$

其中  $\phi_{i-1/2,j}^{n+1}$  为单元界面值,  $\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1}$  为时间导数,  $\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L}$  和  $\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R}$  为单边有限差分近似, 形式如下:

$$\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^n}{\Delta t}, \quad (3.12)$$

$$\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x/2}, \quad \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x/2}. \quad (3.13)$$

将 (3.10) 和 (3.11) 代入 (3.9), 可得  $I(x_{i-1/2}, y_j, \Omega, t)$  的近似.

由上面得到的近似, 通过直接计算得到界面数值通量  $\bar{F}_{i-1/2,j,m}^n$  的如下表达式:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{i-1/2,j,m}^n &= \frac{c}{\epsilon \Delta t} A_m^{-1} \left( \int_{t_n}^{t_{n+1}} \iint_{\bar{S}_m^2} \mu \psi_{\ell,m} I(x_{i-1/2}, y_j, \Omega, t) d\zeta d\theta dt \right)_{N_m \times 1} \\ &= \tilde{\alpha}_{i-1/2,j} A_m^{-1} B_m (\bar{I}_{i-1,j,m}^n 1_{m=1,4} + \bar{I}_{i,j,m}^n 1_{m=2,3}) \\ &\quad + \tilde{c}_{i-1/2,j} A_m^{-1} G_m \phi_{i-1/2,j}^{n+1} + \tilde{e}_{i-1/2,j} A_m^{-1} G_m \delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} \\ &\quad + \tilde{d}_{i-1/2,j} A_m^{-1} R_m (\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} 1_{m=1,4} + \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} 1_{m=2,3}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里当  $m = 1$  或  $m = 4$  时,  $1_{m=1,4} = 1$ ; 反之, 当  $m = 2$  或  $m = 3$  时,  $1_{m=1,4} = 0$ . 类似可以定义  $1_{m=2,3}$ . (3.14) 中的系数  $\tilde{\alpha}_{i-1/2,j}$ 、 $\tilde{c}_{i-1/2,j}$ 、 $\tilde{e}_{i-1/2,j}$  和  $\tilde{d}_{i-1/2,j}$  分别由下面的函数给出:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\Delta t, \epsilon, \sigma) &= \frac{c}{\epsilon \Delta t \nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}), \\ \tilde{c}(\Delta t, \epsilon, \sigma) &= \frac{c^2 \sigma}{2\pi \Delta t \epsilon^3 \nu} \left( \Delta t - \frac{1}{\nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}) \right), \\ \tilde{e}(\Delta t, \epsilon, \sigma) &= \frac{c^2 \sigma}{2\pi \Delta t \epsilon^3 \nu^3} \left( 1 - e^{-\nu \Delta t} - \nu \Delta t e^{-\nu \Delta t} - \frac{1}{2} (\nu \Delta t)^2 \right), \\ \tilde{d}(\Delta t, \epsilon, \sigma) &= -\frac{c^3 \sigma}{2\pi \Delta t \epsilon^4 \nu^2} \left( \Delta t (1 + e^{-\nu \Delta t}) - \frac{2}{\nu} (1 - e^{-\nu \Delta t}) \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中  $\nu = c\sigma/\epsilon^2$ . (3.14) 中的矩阵  $B_m$ 、 $G_m$  和  $R_m$  定义如下:

$$\begin{aligned} B_m &= \left( \iint_{\bar{S}_m^2} \mu \psi_{k,m} \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times N_m}, \\ G_m &= \left( \iint_{\bar{S}_m^2} \mu \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times 1}, \quad R_m = \left( \iint_{\bar{S}_m^2} \mu^2 \psi_{\ell,m} d\zeta d\theta \right)_{N_m \times 1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.1.3 宏观辅助量的更新与输运方程的求解

为得到 (3.5) 中的  $\tilde{\phi}_{i,j} = \phi_{i,j}^{n+1}$  及 (3.14) 中的  $\phi_{i-1,j}^{n+1}$ 、 $\phi_{i-1/2,j}^{n+1}$  和  $\phi_{i,j}^{n+1}$  等宏观量, 首先对灰体辐射输运方程 (2.1) 关于角度积分得到宏观辅助方程组 (2.13). 然后运用有限体积方法对 (2.13) 进行离散, 相应的边界数值通量实际上就是把数值通量 (3.14) 对角度积分后所得到的表达式. 这样, 宏观辅助方程 (2.13) 可以封闭求解, 从而得到宏观量. 利用求得的宏观量, 就可求解输运方程. 同样的渐近分析方法可验证角度有限元离散的 UGKS 方法也具有渐近保持性质. 详细的过程可参见第 2 节相应的内容.

## 3.2 基于 $FP_N$ 的角度离散

本小节对方程 (2.1) 的角度变量用  $FP_N$  方法进行离散, 空间变量用有限体积进行离散. 与上面采用角度有限元方法不同之处是角度的离散. 因此, 下面只给出角度离散方程.

### 3.2.1 $P_N$ 方程

为简化记号, 记  $\langle \cdot \rangle$  为关于单位球面的角度积分, 即

$$\langle \cdot \rangle = \int_{S^2} \cdot d\Omega.$$

对整数  $\ell$  和  $m$ , 令  $\psi_\ell^m(\mathbf{\Omega})$  ( $\ell \geq 0$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ ) 为实的归一化的球谐函数, 满足  $\langle \psi_\ell^m \psi_{\ell'}^{m'} \rangle = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$ , 其中  $\delta_{\ell,\ell'}$  为 Kronecker 函数. 同样由二维笛卡尔空间上光子传播角度方向的对称性, 我们只需考虑部分的球谐函数, 例如, 对  $N = 1$ , 只需考虑

$$\psi_0^0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad \psi_1^0 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\mu, \quad \psi_1^1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\xi.$$

对于非负整数  $N$ , 令

$$\vec{\psi} = (\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_1^1, \dots, \psi_N^0, \dots, \psi_N^N)^T. \quad (3.17)$$

定义相应的球谐矩为  $\vec{I} = \langle \vec{\psi} I \rangle$ . 由方程 (2.1), 可得如下关于矩  $\vec{I}$  的方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + \epsilon \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \vec{\psi} \mathbf{\Omega} I \rangle = \sigma \left( \frac{1}{4\pi} acT^4 \langle \vec{\psi} \rangle - \vec{I} \right), \\ \epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma(2\sqrt{\pi}I_0^0 - acT^4), \end{cases} \quad (3.18)$$

其中

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \vec{\psi} \mathbf{\Omega} I \rangle = \partial_x \langle \vec{\psi} \mu I \rangle + \partial_y \langle \vec{\psi} \xi I \rangle. \quad (3.19)$$

方程 (3.18) 是原方程 (2.2) 关于角度变量精确积分得到的. 为了封闭系统, 通量中未处理的  $I$  需要用已知的矩  $\vec{I}$  表示, 这就是所谓的矩封闭问题. 在基于  $P_N$  的 UGKS 方法中, 通量中  $I$  的  $P_N$  封闭通过在网格边界上构造输运方程的积分解得到. 求解封闭后的矩方程, 即可得到  $I$  的球谐展开系数. 从而得到  $P_N$  近似解.

### 3.2.2 FP<sub>N</sub> 方程

需要注意的是, 如果方程 (2.1) 的精确解不是足够光滑的, 则上面的  $P_N$  解会出现振荡. 为减少振荡, 利用文献 [34] 的想法, 对方程 (3.18) 添加过滤项 (阻尼项), 从而得到下面的 FP<sub>N</sub> 方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + \epsilon \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \vec{\psi} \Omega I \rangle = \sigma \left( \frac{1}{4\pi} acT^4 \langle \vec{\psi} \rangle - \vec{I} \right) - \frac{\epsilon^2}{c} \sigma_f \mathbf{F} \vec{I}, \\ \epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma(2\sqrt{\pi} I_0^0 - acT^4). \end{cases} \quad (3.20)$$

这里稍微滥用了记号, 仍用记号  $\vec{I}$  表示 FP<sub>N</sub> 方程的解.  $\sigma_f \geq 0$  是一个可调节的参数, 其决定了过滤的强度, 它可依赖于空间变量 [38, 39].  $\mathbf{F}$  是一个对角的过滤矩阵, 对角元素为  $\mathbf{F}_{(\ell,m),(\ell,m)} = -\ln(f(\frac{\ell}{N+1}))$ , 其中  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  是一个过滤函数, 满足  $f(0) = 1$ . 例如,  $f$  可取如下的 Lanczos 函数和球谐样条函数:

$$f_{\text{Lanczos}}(\lambda) = \frac{\sin(\lambda)}{\lambda}, \quad f_{\text{SSpline}}(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^4}. \quad (3.21)$$

关于过滤函数的详细定义和参数  $\sigma_f$  的确定可参见文献 [38-40]. 值得一提的是, FP<sub>N</sub> 方程不会破坏  $P_N$  方程的旋转不变性, 因此其解不会出现射线效应. 如果令方程 (3.20) 中的  $\sigma_f = 0$ , 则 FP<sub>N</sub> 方程将退化到  $P_N$  方程.

### 3.2.3 FP<sub>N</sub> 方程的宏观微观分解

令  $\rho = \int_{S^2} I d\Omega$ . 注意到  $I_0^0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho$  以及  $P_N$  展开会将辐射强度自然地分成宏观和微观部分, 我们将方程 (3.20) 分解成宏观和微观部分. 为方便记号, 我们先对  $\vec{\psi}$  和  $\vec{I}$  进行分解:

$$\vec{\psi} = (\psi_0^0, \check{\psi}^T)^T, \quad \vec{I} = (I_0^0, \check{I}^T)^T = \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho, \check{I}^T \right)^T,$$

其中  $\check{\psi}$  和  $\check{I}$  分别为  $\vec{\psi}$  和  $\vec{I}$  中余下的分量.

我们将系统 (3.20) 中关于宏观量  $\rho$  和  $T$  的方程称作宏观方程. 由于  $f(0) = 1$ , 因而宏观方程具有如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \Omega I \rangle = \sigma(acT^4 - \rho), \\ \epsilon^2 C_\nu \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma(\rho - acT^4). \end{cases} \quad (3.22)$$

进一步, 记  $\phi = acT^4$ , 则宏观方程 (3.22) 可改写成如下关于宏观量  $\rho$  和  $\phi$  的方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \epsilon \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \Omega I \rangle = \sigma(\phi - \rho), \\ \epsilon^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta \sigma(\rho - \phi), \end{cases} \quad (3.23)$$

其中  $\beta(x, t) = 4acT^3/C_\nu$ .

我们把系统 (3.20) 中余下的方程称作微观方程, 其形式如下:

$$\frac{\epsilon^2}{c} \frac{\partial \check{I}}{\partial t} + \epsilon \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \check{\psi} \Omega I \rangle = -\sigma \check{I} - \frac{\epsilon^2}{c} \sigma_f \check{\mathbf{F}} \check{I}, \quad (3.24)$$

其中  $\check{\mathbf{F}}$  是通过去掉矩阵  $\mathbf{F}$  的第一行和第一列得到的.

方程 (3.23) 和 (3.24) 中的  $I$  的近似是通过在网格边界上构造形如 (3.9) 的积分得到的, 它与上一小节不同之处在于, 这里关于角度变量的初值是用  $P_N$  进行重构, 空间变量用分片常数重构. 对于宏观量  $\phi$  的重构, 出于保正考虑, 先对  $\phi$  进行分解:

$$\phi = (\phi - \rho) + \rho,$$

然后对  $\phi - \rho$  进行分片常数重构, 对  $\rho$  进行分片线性重构, 即

$$\begin{aligned} \phi(x, y_j, t) &= (\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \rho_{i-1/2,j}^{n+1}) + \rho_{i-1/2,j}^{n+1} + \delta_x \rho_{i-1/2,j}^{n+1} (x - x_{i-1/2}) \\ &= \phi_{i-1/2,j}^{n+1} + \delta_x \rho_{i-1/2,j}^{n+1} (x - x_{i-1/2}), \end{aligned}$$

其中

$$\phi_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{2}, \quad \delta_x \rho_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}.$$

基于上述重构, 我们可以进一步分析格式的宏观方程保正的条件, 通过添加保正限制器等得到了严格保正的格式 PFPN.

## 4 辐射流体力学方程组的 UGKS 方法

辐射流体力学方程组由可压缩流体力学方程和辐射输运方程的耦合构成. 首先, 流体运动影响着辐射光子在背景流体的传输过程, 其具体表现为辐射传输方程中的碰撞项变得极为复杂, 通常需要利用考虑相对论效应的 Lorentz 变换才能精确得到. 其次, 辐射效应对背景流体的运动过程也有非常重要的影响, 特别当辐射动量沉积项对流体运动速度的影响不可忽略时, 需要考虑辐射压力对流体运动方程的影响. 同时, 由于辐射方程中碰撞项的复杂性, 导致辐射能量与物质能量的交换过程也变得复杂了很多.

### 4.1 辐射流体力学方程

本小节考虑如下的辐射流体力学方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = -\frac{1}{c} \int \vec{\Omega} S d\vec{\Omega}, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot [\vec{v} (\rho E + p)] = -\frac{1}{\epsilon} \int S d\vec{\Omega}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I + \epsilon \nabla \cdot (\theta \vec{\beta} I) \\ \quad = -\frac{\sigma_t}{\epsilon} I + \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) \frac{1}{4\pi} acT^4 + \frac{\epsilon \sigma_s}{4\pi} c E_r \\ \quad - \frac{1}{4\pi} \sigma_t \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right] + \frac{3}{4\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t E_r \vec{\Omega} \cdot \vec{v} \\ \triangleq S, \end{cases} \quad (4.1)$$



其中  $\rho$  为物质密度,  $T$  为物质温度,  $\vec{v}$  为流体运动速度, 物质总能量为

$$\rho E = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 + \rho e.$$

为了使整个方程组封闭, 需要给出物质压力  $p$  和物质内能  $e$  依赖于  $\rho$  和  $T$  的表达式 (状态方程). 辐射强度  $I$  是空间、时间、光子角度传播方向  $\vec{\Omega}$  和光子频率的函数. 为简单起见, 只考虑灰体近似的情形, 即辐射强度是关于频率变量的积分平均. 在上面的方程中,  $c$  为光速,  $\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{v}}{c}$  为相对速度.  $S$  项代表辐射与物质之间的相互作用, 辐射常数为  $a$ , 参数  $\sigma_s$  为散射系数, 参数  $\sigma_t$  为总吸收系数,  $\epsilon$  为尺度化因子. 可调参数  $\theta$  与描述流体运动的方式相关, 例如, 在 Lagrange 坐标系下, 取  $\theta = 1$ ; 而在 Euler 坐标系下, 取  $\theta = 0$ ; 对随动坐标系, 取  $\theta = 4/3$ . 函数  $E_r$  和  $\vec{F}_r$  分别为辐射能量和辐射流, 其具体表达式为

$$E_r = \frac{1}{c} \int I d\vec{\Omega}, \quad \vec{F}_r = \int \vec{\Omega} I d\vec{\Omega}.$$

在方程组 (4.1) 中的第二、三个方程的角度积分右端项分别给出了辐射动量和能量沉积项, 不难验证总动量和总能量守恒, 其方程为

$$\begin{cases} \partial_t \left( \rho \vec{v} + \frac{\epsilon}{c^2} \vec{F}_r \right) + \nabla \cdot \left( \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + \frac{\epsilon \theta}{c^2} \vec{v} \otimes \vec{F}_r + \vec{P} \right) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E + E_r) + \nabla \cdot \left[ \vec{v} (\rho E + \theta E_r + p) + \frac{1}{\epsilon} \vec{F}_r \right] = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中  $\vec{P}$  为辐射压力张量, 其具体形式为

$$\vec{P} = \frac{1}{c} \int \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} I d\vec{\Omega}.$$

对任意选择的  $\theta$  值, 在光性厚介质区, 当参数  $\epsilon$  趋于 0 时, 方程组 (4.1) 具有收敛到其相应扩散极限方程的性质. 这一点可由把未知变量进行关于参数  $\epsilon$  展开并比较系数的形式推导方法导出, 即令

$$\begin{cases} \rho = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{(i)} \epsilon^i, & \vec{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{v}^{(i)} \epsilon^i, \\ T = \sum_{i=0}^{\infty} T^{(i)} \epsilon^i, & I = \sum_{i=0}^{\infty} I^{(i)} \epsilon^i. \end{cases} \quad (4.3)$$

将展开式 (4.3) 代入到原方程 (4.1) 中并比较展开系数, 由 (4.1) 中第 4 个方程中的  $O(\epsilon^{-1})$ - 项有

$$I^{(0)} = \frac{1}{4\pi} ac(T^{(0)})^4. \quad (4.4)$$

由此可得

$$E_r^{(0)} = a(T^{(0)})^4, \quad \vec{F}_r^{(0)} = 0, \quad \vec{P}^{(0)} = \frac{1}{3} a(T^{(0)})^4 \vec{D}, \quad (4.5)$$

其中  $\vec{D}$  为单位矩阵. 在 (4.1) 的前两个方程中没有  $O(\epsilon^{-1})$ - 项, 并且在 (4.1) 的第 3 个方程中  $O(\epsilon^{-2})$ - 和  $O(\epsilon^{-1})$ - 项与上面的方程 (4.4) 和 (4.5) 是相容的.

再一次利用方程 (4.4) 和 (4.5), 则 (4.1) 中第 4 个方程中的  $O(\epsilon^0)$ - 项满足

$$I^{(1)} = \frac{1}{4\pi} ac(T^{(1)})^4 - \frac{c}{\sigma_t^{(0)}} \vec{\Omega} \cdot \nabla I^{(0)} + \frac{3}{4\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) E_r^{(0)} \vec{\Omega} \cdot \vec{v}^{(0)}, \quad (4.6)$$

因此有

$$E_r^{(1)} = a(T^{(1)})^4, \quad \vec{F}_r^{(1)} = -\frac{c}{3\sigma_t^{(0)}} \nabla E_r^{(0)} + \left(\frac{4}{3} - \theta\right) E_r^{(0)} \vec{v}^{(0)}, \quad \bar{P}^{(1)} = \frac{1}{3} a(T^{(1)})^4 \bar{D}. \quad (4.7)$$

最后, 由 (4.1) 中第一个方程和 (4.2) 中的  $O(\epsilon^0)$ - 项可以得出

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{(0)} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)}) = 0, \\ \partial_t (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)} \otimes \vec{v}^{(0)} + \bar{P}^{(0)}) + \nabla p^{(0)} = 0, \\ \partial_t (\rho^{(0)} E^{(0)} + E_r^{(0)}) + \nabla \cdot [\vec{v}^{(0)} (\rho^{(0)} E^{(0)} + \theta E_r^{(0)} + p^{(0)}) + \vec{F}_r^{(1)}] = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

将 (4.7) 中  $\vec{F}_r^{(1)}$  的表达式代入 (4.8) 可得如下的平衡扩散极限方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{(0)} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)}) = 0, \\ \partial_t (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)}) + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \vec{v}^{(0)} \otimes \vec{v}^{(0)} + \bar{P}^{(0)}) + \nabla p^{(0)} = 0, \\ \partial_t (\rho^{(0)} E^{(0)} + E_r^{(0)}) + \nabla \cdot \left[ \vec{v}^{(0)} \left( \rho^{(0)} E^{(0)} + \frac{4}{3} E_r^{(0)} + p^{(0)} \right) \right] = \nabla \cdot \left( \frac{c}{3\sigma_R} \nabla E_r^{(0)} \right), \end{cases} \quad (4.9)$$

其中 Rosseland 平均自由程  $\sigma_R$  等于  $\sigma_t^{(0)}$ .

## 4.2 辐射流体力学方程组的渐近保持格式

本小节给出方程组 (4.1) 渐近保持的 UGKS 的简要描述. 首先, 基于传统的算子分裂方法, 将辐射流体力学方程组 (4.1) 分裂为流体力学和辐射输运两个部分. 对流体力学部分, 求解如下的可压缩 Euler 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\vec{v} (\rho E + p)) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

为了使上面的流体力学方程组封闭和简单起见, 考虑理想气体状态方程 (equation of state, EOS), 则压力和物质内能满足

$$p = (\gamma - 1) \rho e, \quad e = C_v T, \quad (4.11)$$

其中  $\gamma$  为绝热指数,  $C_v$  为比热容系数.

对考虑了辐射动量和能量沉积项的辐射输运部分, 我们求解如下的耦合方程组:

$$\begin{cases} \partial_t (\rho \vec{v}) = -\frac{1}{c} \int \vec{\Omega} S d\vec{\Omega} = \frac{\sigma_t}{\epsilon c} \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right], \\ \partial_t (\rho E) = -\frac{1}{\epsilon} \int S d\vec{\Omega} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) (c E_r - a c T^4) + \frac{\sigma_t}{\epsilon} \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right], \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I + \epsilon \nabla \cdot (\theta \vec{\beta} I) \\ = -\frac{\sigma_t}{\epsilon} I + \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) \frac{1}{4\pi} a c T^4 + \frac{\epsilon \sigma_s}{4\pi} c E_r \\ - \frac{1}{4\pi} \sigma_t \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right] + \frac{3}{4\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t E_r \vec{\Omega} \cdot \vec{v} \\ \triangleq S. \end{cases} \quad (4.12)$$

整个辐射流体力学方程组的求解是通过用 GKS (gas kinetic scheme) [41] 方法求解 (4.10) 和用 UGKS [11] 方法求解 (4.12) 这两个过程的耦合构成的. 通过辐射动量和能量沉积项实现流体力学和辐射输运这两个部分之间的相互作用. GKS 和 UGKS 方法都是采用有限体积进行空间离散, 所有的物理量都定义在网格中心, 容易设计辐射与流体相容的格式. GKS 方法主要是基于利用介观动理学 BGK 方程与宏观流体力学之间的关系, 并利用 BGK 方程在网格边界附近的积分构造宏观 Euler 方程网格边界上的数值通量, 构造框架类似于 UGKS 方法中宏观辅助方程的求解过程, 这里不再详细介绍, 有兴趣的读者可参见文献 [41]. 下面主要介绍辐射输运部分的数值算法.

#### 4.2.1 辐射输运部分的数值离散

在用 GKS 方法从时间步  $t^n$  到  $t^{n+1}$  更新完流体力学量  $(\rho, \rho\vec{v}, \rho E)$  后, 设流体密度从  $\rho^n$  更新为  $\rho^{n+1}$ , 流体速度从  $\vec{v}^n$  更新到中间值  $\vec{v}^h$ , 物质总能量同样从  $E^n$  更新到中间值  $E^h$ . 因此不妨设在流体力学的更新过程中, 分别得到物质比内能和比动能的中间值  $e^h$  和  $\frac{1}{2}|\vec{v}^h|^2$ . 基于更新后的流体力学量  $(\rho^{n+1}, \vec{v}^h, E^h)$ , 重写辐射输运方程 (4.12) 为如下的形式:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho\vec{v}) = -\frac{1}{c} \int \vec{\Omega} S d\vec{\Omega}, \\ \partial_t(\rho E) = -\frac{1}{\epsilon} \int S d\vec{\Omega}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I + \epsilon \nabla \cdot (\theta \vec{\beta} I) = S. \end{cases} \quad (4.13)$$

对 (4.13), 首先利用离散纵标法对角度变量进行离散, 可得

$$\begin{cases} \partial_t(\rho\vec{v}) = -\frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m S_m \omega_m, \\ \partial_t(\rho E) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{m=1}^M S_m \omega_m, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial I_m}{\partial t} + \vec{\Omega}_m \cdot \nabla I_m + \epsilon \nabla \cdot (\theta \vec{\beta} I_m) = S_m, \quad m = 1, \dots, M, \end{cases} \quad (4.14)$$

其中  $S_m$  为  $S$  在第  $m$  个离散角度上的取值, 即辐射强度量用  $I_m$  替代.

在二维情形, 对 (4.14) 用有限体积方法离散, 可得

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^{n+1}(\vec{v}_{i,j}^{n+1} - \vec{v}_{i,j}^h) = -\frac{\Delta t}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m S_{i,j,m}^{n+1} \omega_m, \\ \rho_{i,j}^{n+1}(\hat{E}_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^h) = -\frac{\Delta t}{\epsilon} \sum_{m=1}^M S_{i,j,m}^{n+1} \omega_m, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{I_{i,j,m}^{n+1} - I_{i,j,m}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2},j,m} - F_{i-\frac{1}{2},j,m}}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2},m} - G_{i,j-\frac{1}{2},m}}{\Delta x_i \Delta y_j} = S_{i,j,m}^{n+1}, \end{cases} \quad (4.15)$$

其中

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n, \quad \Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad \Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}.$$

网格边界上的数值通量  $F_{i\pm\frac{1}{2},j,m}$ 、 $G_{i,j\pm\frac{1}{2},m}$  和右端项  $S_{i,j,m}^{n+1}$  定义为

$$\begin{aligned}
F_{i+\frac{1}{2},j,m} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mu_m I_{i+\frac{1}{2},j,m} dy dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \epsilon \theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_{i+\frac{1}{2},j,m} dy dt \\
&\triangleq F_{i+\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i+\frac{1}{2},j,m}^2, \\
F_{i-\frac{1}{2},j,m} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mu_m I_{i-\frac{1}{2},j,m} dy dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \epsilon \theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_{i-\frac{1}{2},j,m} dy dt \\
&\triangleq F_{i-\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i-\frac{1}{2},j,m}^2, \\
G_{i,j+\frac{1}{2},m} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \xi_m I_{i,j+\frac{1}{2},m} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \epsilon \theta \tilde{\beta}_y \tilde{I}_{i,j+\frac{1}{2},m} dx dt \\
&\triangleq G_{i,j+\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j+\frac{1}{2},m}^2, \\
G_{i,j-\frac{1}{2},m} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \xi_m I_{i,j-\frac{1}{2},m} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \epsilon \theta \tilde{\beta}_y \tilde{I}_{i,j-\frac{1}{2},m} dx dt \\
&\triangleq G_{i,j-\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j-\frac{1}{2},m}^2, \\
S_{i,j,m}^{n+1} &= - \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} \right)_{i,j}^{n+1} I_{i,j}^{n+1} + \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right)_{i,j}^{n+1} \frac{1}{2\pi} ac(T_{i,j}^{n+1})^4 + \left( \frac{\epsilon \sigma_s}{2\pi} \right)_{i,j}^{n+1} c(E_r)_{i,j}^{n+1} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} (\sigma_t)_{i,j}^{n+1} \tilde{\beta}_{i,j}^a \cdot \left[ (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j} \right] \\
&\quad + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) (\sigma_t)_{i,j}^{n+1} (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{\Omega} \cdot \vec{v}_{i,j},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中  $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ ,  $\tilde{\beta}_{i,j}^a = (\tilde{\beta}_{i,j}^{n+1} + \tilde{\beta}_{i,j}^h)/2$ , 则  $\vec{v}_{i,j} = \vec{v}_{i,j}^h$ , 使得 (4.2) 中的总动量和总能量守恒. 边界通量  $F_{i\pm\frac{1}{2},j,m}^2$  和  $G_{i,j\pm\frac{1}{2},m}^2$  中的  $\tilde{I}$  取显式值, 流体速度  $\vec{v}$  取迎风方向值. 为了使 (4.15) 完全可解, 还需要确定 (4.16) 中  $F_{i\pm\frac{1}{2},j,m}^1$  和  $G_{i,j\pm\frac{1}{2},m}^1$  中的  $I$  值, 以及隐式源项  $S_{i,j,m}^{n+1}$  中的宏观量  $T$ 、 $E_r$  和  $\vec{F}_r$  在  $t^{n+1}$  上的值.

#### 4.2.2 网格边界上辐射强度 $I$ 的计算

对 UGKS 方法中的网格边界辐射强度  $I$ , 可利用在网格边界上辐射输运方程的积分解来确定. 正如前面所述, 记  $\phi = acT^4$ , 在以  $\vec{x}_s = (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$  为中心的网格边界上, 求解如下的辐射输运方程:

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{c} \partial_t I_m + \mu_m \partial_x I_m + \epsilon \partial_x (\theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_m) = \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) \frac{\tilde{\phi}}{2\pi} + \epsilon \sigma_s \frac{c \tilde{E}_r}{2\pi} - \frac{\sigma_t}{\epsilon} I_m + \tilde{S}_m, \\ \tilde{S}_m = -\frac{1}{2\pi} \sigma_t \tilde{\beta}^a \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon \tilde{E}_r \vec{v} \right] + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t \tilde{E}_r \vec{\Omega} \cdot \vec{v}, \\ I_m(x, y_j, t) |_{t=t^n} = I_{m,0}(x, y_j). \end{cases} \tag{4.17}$$

需要指出的是, (4.17) 中的初始辐射强度  $I_{m,0}$  及  $\tilde{\phi}$ 、 $\tilde{E}_r$  和  $\vec{F}_r$  将在接下来的部分中确定.

求解方程 (4.17), 得到积分解为

$$I_m(t, x_{i-1/2}, y_j, \mu_m, \xi_m)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t^n}^t \frac{c}{\epsilon} e^{-\sigma_{i-\frac{1}{2},j}(t-s)} (\bar{S}_m - \epsilon \partial_x (\theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_m)) ds \\
 &\quad + e^{-\sigma_{i-1/2,j}(t-t^n)} I_{m,0} \left( x_{i-1/2} - \frac{c\mu_m}{\epsilon} (t-t^n) \right) \\
 &\quad + \int_{t^n}^t \frac{c}{\epsilon} e^{-\sigma_{i-\frac{1}{2},j}(t-s)} \left( \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) \frac{\tilde{\phi}}{2\pi} + \epsilon \sigma_s \frac{c\tilde{E}_r}{2\pi} \right) \left( s, x_{i-1/2} - \frac{c\mu_m}{\epsilon} (t-s) \right) ds, \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

其中  $\sigma = c\sigma_t/\epsilon^2$ , 而  $\sigma_{i-1/2,j}$  是函数  $\sigma$  在相应网格边界上的取值. 更进一步, 为了保持格式的渐近性质,  $\bar{S}_m$  中的  $\tilde{E}_r$ 、 $\vec{v}$  和  $\tilde{\beta}^a$  的取值应与  $F_{i-\frac{1}{2},j,m}^2$  的计算相容, 即

$$\bar{E}_r = \int \tilde{I} d\vec{\Omega} = \sum_{m=1}^M \tilde{I}_m \omega_m, \quad \vec{v} = \vec{v}^h \quad \text{和} \quad \tilde{\beta}^a = \frac{1}{2}(\vec{v}^h + \vec{v}^{n+1}).$$

导数项  $\epsilon \partial_x (\theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_m)$  由下式给出:

$$\epsilon \partial_x (\theta \tilde{\beta}_x \tilde{I}_m) = \frac{2\epsilon \theta ((\tilde{\beta}_x \tilde{I}_m)|_{(i,j)} - (\tilde{\beta}_x \tilde{I}_m)|_{(i-1,j)})}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}.$$

为了完全确定 (4.18) 中网格边界上的辐射强度  $I$  的值, 其中的初始值  $I_{m,0}$  由下面的分片重构多项式给出:

$$I_{m,0}(x, y_j) = \begin{cases} I_{i-1,j,m}^n + \delta_x I_{i-1,j,m}^n (x - x_{i-1,j}), & \text{若 } x < x_{i-1/2,j}, \\ I_{i,j,m}^n + \delta_x I_{i,j}^n (x - x_{i,j}), & \text{若 } x > x_{i-1/2,j}, \end{cases} \tag{4.19}$$

$x$ -方向上网格  $(i, j)$  和  $(i-1, j)$  中的重构梯度分别为  $\delta_x I_{i,j}^n$  和  $\delta_x I_{i-1,j,m}^n$ . 同样地, 为了去除可能出现的数值振荡, (4.19) 中使用了二阶 MUSCL 限制器 (参见文献 [37]).

对宏观量  $\tilde{\phi}$  和  $\tilde{E}_r$  关于时间和空间变量进行隐式重构, 例如, 对  $\tilde{\phi}$ , 其重构的形式为

$$\tilde{\phi}(x, y_j, t) = \phi_{i-1/2,j}^{n+1} + \delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} (t - t^{n+1}) + \begin{cases} \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} (x - x_{i-1/2,j}), & \text{若 } x < x_{i-1/2,j}, \\ \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} (x - x_{i-1/2,j}), & \text{若 } x > x_{i-1/2,j}, \end{cases} \tag{4.20}$$

其中时间导数  $\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} = (\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^n) / \Delta t$ , 空间导数为

$$\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}/2}, \quad \delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,R} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x_i/2}.$$

$\tilde{E}_r$  的重构可类似处理.

最后, 给出方程 (4.18) 中  $\bar{S}_m$  项的处理. 为了保持格式的渐近性质, 这一项的计算应与 (4.16) 中  $F_{i\pm\frac{1}{2},j,m}^2$  和  $G_{i,j\pm\frac{1}{2},m}^2$  的计算相容, 其中网格边界  $\vec{v}$  的取值由迎风方向确定. 例如, 对左边界, 有

$$F_{i-1/2,j,m}^2 = \begin{cases} \theta v_{x,i-1,j}^h I_{m,i-1,j}^n, & \text{若 } 0.5(v_{x,i-1,j} + v_{x,i,j}) \leq 0, \\ \theta v_{x,i,j}^h I_{m,i,j}^n, & \text{若 } 0.5(v_{x,i-1,j} + v_{x,i,j}) > 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

和

$$\bar{S}_{m,i-1/2,j} = -\frac{1}{2\pi} \tilde{\beta}^a \cdot \sigma_t^{n+1} \left[ \vec{F}_r^{n+1} - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r^n \vec{v} \right] \Big|_{i-1/2,j}$$

$$+ \begin{cases} \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t^{n+1} E_r^n \vec{\Omega} \cdot \vec{v} \Big|_{i-1,j}, & \text{若 } 0.5(v_{x,i-1,j} + v_{x,i,j}) \leq 0, \\ \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t^{n+1} E_r^n \vec{\Omega} \cdot \vec{v} \Big|_{i,j}, & \text{若 } 0.5(v_{x,i-1,j} + v_{x,i,j}) > 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

其中的上标  $n$  和  $n+1$  为对应的时间步,  $\bar{S}_{m,i-1/2,j}$  中的第一项为网格  $(i-1, j)$  和  $(i, j)$  上相应时间步的几何平均值, 第二项由  $n$ -时间步的值给出并与  $F_{i-1/2,j,m}^2$  的计算相容. 到此为止, 完成了网格边界上的辐射强度  $I$  的构造. 但是 (4.16) 中的宏观量  $\phi_{i-1/2,j}^{n+1}$ 、 $\phi_{i-1,j}^{n+1}$ 、 $\phi_{i,j}^{n+1}$  和  $(E_r)_{i-1/2,j}^{n+1}$ 、 $(E_r)_{i-1,j}^{n+1}$ 、 $(E_r)_{i,j}^{n+1}$  将通过下面的宏观辅助方程的计算给出.

### 4.2.3 宏观辅助方程的计算

为了得到网格边界通量中的宏观量, 首先对方程 (4.1) 关于角度积分, 可得

$$\begin{cases} \partial_t(\rho \vec{v}) = -\frac{1}{c} \left\{ -\frac{\sigma_t}{\epsilon} \vec{F}_r + \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t E_r \vec{v} \right\}, \\ \partial_t(\rho E) = -\frac{1}{\epsilon} \left\{ \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) (acT^4 - cE_r) - \sigma_t \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right] \right\}, \\ \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \langle \vec{\Omega} \cdot \nabla I \rangle + \epsilon \nabla \cdot \langle \theta \vec{\beta} I \rangle = \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_s \right) (acT^4 - cE_r) - \sigma_t \vec{\beta} \cdot \left[ \vec{F}_r - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon E_r \vec{v} \right], \\ \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{F}_r}{\partial t} + \frac{1}{c} \langle \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} \cdot \nabla I \rangle + \frac{\epsilon}{c} \nabla \cdot \langle \theta \vec{\beta} \otimes \vec{\Omega} I \rangle = -\frac{\sigma_t}{c\epsilon} \vec{F}_r + \frac{1}{c} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_t E_r \vec{v}, \end{cases} \quad (4.23)$$

其中的角度积分项定义为

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Omega} \cdot \nabla I \rangle &:= \int \vec{\Omega} \nabla I d\vec{\Omega}, & \langle \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} \cdot \nabla I \rangle &:= \int \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega} \nabla I d\vec{\Omega}, \\ \langle \theta \vec{\beta} I \rangle &:= \int \theta \vec{\beta} I d\vec{\Omega}, & \langle \theta \vec{\beta} \otimes \vec{\Omega} I \rangle &:= \int \theta \vec{\beta} \otimes \vec{\Omega} I d\vec{\Omega}. \end{aligned}$$

对方程 (4.23) 利用有限体积方法进行离散, 可得到如下的格式:

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h - \frac{\Delta t}{c} \left\{ -\frac{\sigma_{t,i,j}^{n+1}}{\epsilon} (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} + \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_{t,i,j}^{n+1} (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h \right\}, \\ \rho_{i,j}^{n+1} E_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{n+1} E_{i,j}^h - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left\{ \left( \frac{\sigma_{t,i,j}^{n+1}}{\epsilon} - \epsilon \sigma_{s,i,j}^{n+1} \right) (ac(T_{i,j}^{n+1})^4 - c(E_r)_{i,j}^{n+1}) \right. \\ \quad \left. - \sigma_{t,i,j}^{n+1} \vec{\beta}_{i,j}^a \cdot \left[ (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h \right] \right\}, \\ \epsilon (E_r)_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} (\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} (\Psi_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Psi_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ = \epsilon (E_r)_{i,j}^n + \Delta t \left\{ \left( \frac{\sigma_{t,i,j}^{n+1}}{\epsilon} - \epsilon \sigma_{s,i,j}^{n+1} \right) (ac(T_{i,j}^{n+1})^4 - c(E_r)_{i,j}^{n+1}) \right. \\ \quad \left. - \sigma_{t,i,j}^{n+1} \vec{\beta}_{i,j}^a \cdot \left[ (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h \right] \right\}, \\ \frac{\epsilon}{c^2} (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} (\vec{\Phi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \vec{\Phi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} (\vec{\Psi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ = \frac{\epsilon}{c^2} (\vec{F}_r)_{i,j}^n + \Delta t \left\{ -\frac{\sigma_{t,i,j}^{n+1}}{c\epsilon} (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{c} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \sigma_{t,i,j}^{n+1} (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h \right\}, \end{cases} \quad (4.24)$$

其中  $\vec{\beta}_{i,j}^a = (\vec{\beta}_{i,j}^{n+1} + \vec{\beta}_{i,j}^h)/2$ .

与上面的 UGKS 方法一样, (4.24) 中的数值通量是通过对 (4.16) 中的  $F$  和  $G$  进行角度积分而得到的, 即

$$\begin{aligned}
 \Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \sum_{m=1}^M F_{i+\frac{1}{2},j,m} \omega_m = \sum_{m=1}^M (F_{i+\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i+\frac{1}{2},j,m}^2) \omega_m, \\
 \Phi_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \sum_{m=1}^M F_{i-\frac{1}{2},j,m} \omega_m = \sum_{m=1}^M (F_{i-\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i-\frac{1}{2},j,m}^2) \omega_m, \\
 \Psi_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \sum_{m=1}^M G_{i,j+\frac{1}{2},m} \omega_m = \sum_{m=1}^M (G_{i,j+\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j+\frac{1}{2},m}^2) \omega_m, \\
 \Psi_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \sum_{m=1}^M G_{i,j-\frac{1}{2},m} \omega_m = \sum_{m=1}^M (G_{i,j-\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j-\frac{1}{2},m}^2) \omega_m, \\
 \vec{\Phi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m F_{i+\frac{1}{2},j,m} \omega_m = \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m (F_{i+\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i+\frac{1}{2},j,m}^2) \omega_m, \\
 \vec{\Phi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} &= \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m F_{i-\frac{1}{2},j,m} \omega_m = \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m (F_{i-\frac{1}{2},j,m}^1 + F_{i-\frac{1}{2},j,m}^2) \omega_m, \\
 \vec{\Psi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m G_{i,j+\frac{1}{2},m} \omega_m = \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m (G_{i,j+\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j+\frac{1}{2},m}^2) \omega_m, \\
 \vec{\Psi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m G_{i,j-\frac{1}{2},m} \omega_m = \frac{1}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m (G_{i,j-\frac{1}{2},m}^1 + G_{i,j-\frac{1}{2},m}^2) \omega_m.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

因此, 基于 (4.25) 中的宏观边界数值通量, 方程 (4.24) 是关于宏观量  $\vec{v}_{i,j}^{n+1}$ 、 $T_{i,j}^{n+1}$ 、 $(E_r)_{i,j}^{n+1}$  和  $(\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1}$  的一个封闭的非线性代数方程组, 其中的参数  $\sigma_{t,i,j}^{n+1}$  和  $\sigma_{s,i,j}^{n+1}$  隐式地依赖于物质温度  $T_{i,j}^{n+1}$ . 这个方程可由迭代法进行求解.

#### 4.2.4 输运部分解的更新

在迭代求解方程 (4.24) 得到宏观量  $T_{i,j}^{n+1}$ 、 $(E_r)_{i,j}^{n+1}$  和  $(\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1}$  后, 就可得到输运方程网格边界上的通量. 例如, (4.24) 中的  $\phi_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}$  为

$$\phi_{i,j-1/2}^{n+1} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}}{2}.$$

而 (4.20) 中的左、右导数分别为

$$\delta_x \phi_{i-1/2,j}^{n+1,L} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}/2}, \quad \delta_x \phi_{i,j-1/2}^{n+1,R} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x_i/2}.$$

对 (4.20) 中的时间导数  $\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1}$ , 有

$$\delta_t \phi_{i-1/2,j}^{n+1} = \frac{\phi_{i-1/2,j}^{n+1} - \phi_{i-1/2,j}^n}{\Delta t}.$$

同样地, (4.18) 中  $\vec{E}_r$  也可采用类似方法来重构.

利用 (4.24) 得到的宏观量, 可得 (4.16) 中的源项  $S_{i,j,m}^{n+1}$  及数值通量  $F_{i\pm\frac{1}{2},j,m}$  和  $G_{i,j\pm\frac{1}{2},m}$ . 因此, 可通过下面的公式更新 (4.15) 中的辐射强度:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{i,j,m}^{n+1} \triangleq \left( \frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon\sigma_s \right)_{i,j}^{n+1} \frac{1}{2\pi} ac(T_{i,j}^{n+1})^4 + \left( \frac{\epsilon\sigma_s}{2\pi} \right)_{i,j}^{n+1} c(E_r)_{i,j}^{n+1} \\ \quad - \frac{1}{2\pi} (\sigma_t)_{i,j}^{n+1} \beta_{i,j}^a \cdot \left[ (\vec{F}_r)_{i,j}^{n+1} - \left( \frac{4}{3} - \theta \right) \epsilon (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j} \right] \\ \quad + \frac{3}{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \theta \right) (\sigma_t)_{i,j}^{n+1} (E_r)_{i,j}^{n+1} \vec{\Omega} \cdot \vec{v}_{i,j}, \\ I_{i,j}^{n+1} = \frac{\frac{\epsilon}{c\Delta t} I_{i,j}^n + \frac{F_{i-\frac{1}{2},j,m} - F_{i+\frac{1}{2},j,m}}{\Delta x_i \Delta y_j} + \frac{G_{i,j-\frac{1}{2},m} - G_{i,j+\frac{1}{2},m}}{\Delta x_i \Delta y_j} + \hat{S}_{i,j,m}^{n+1}}{\frac{\epsilon}{c\Delta t} + \left( \frac{\sigma_t}{c} \right)_{i,j}^{n+1}}. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

这完成了辐射强度的更新.

利用更新后的辐射强度  $I_{i,j,m}^{n+1}$ , 可更新方程 (4.15) 中的动量方程和能量方程, 从而得到流体速度  $\vec{v}_{i,j}^{n+1}$  和物质温度  $\hat{T}_{i,j}^{n+1}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^{n+1} \vec{v}_{i,j}^h - \frac{\Delta t}{c} \sum_{m=1}^M \vec{\Omega}_m (\hat{S}_{i,j,m}^{n+1} + \left( \frac{\sigma_t}{c} \right)_{i,j}^{n+1} I_{i,j,m}^{n+1}) \omega_m}{\rho_{i,j}^{n+1}}, \\ \hat{E}_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^{n+1} E_{i,j}^h - \frac{\Delta t}{\epsilon} \sum_{m=1}^M (\hat{S}_{i,j,m}^{n+1} + \left( \frac{\sigma_t}{c} \right)_{i,j}^{n+1} I_{i,j,m}^{n+1}) \omega_m}{\rho_{i,j}^{n+1}}, \\ \hat{T}_{i,j}^{n+1} = \frac{\hat{E}_{i,j}^{n+1} - |\vec{v}_{i,j}^{n+1}|^2/2}{C_v}. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

基于 (4.26) 和 (4.27), 我们完成了辐射部分的方程组 (4.13) 的求解.

## 5 数值算例

本节通过几个数值算例来测试上面介绍的数值格式. 在下面的 Marshak wave-2B、Marshak wave-2A、Tophat test 和算例 4 的辐射激波算例中, 取长度单位为厘米 (cm), 质量单位为克 (g), 时间单位为纳秒 (ns), 温度单位为千电子伏特 (keV), 能量单位为焦耳 (GJ). 在上述单位下, 光速为 29.98 cm/ns, 辐射常数  $a$  为 0.01372 GJ/(cm<sup>3</sup>\*keV<sup>4</sup>). 算例 5 中的参数无量纲.

在所有的算例中, 取时间步长为  $\Delta t = \text{CFL} \cdot \epsilon \cdot \frac{\min\{\Delta x, \Delta y\}}{c}$ . 对宏观辅助方程的求解采用了 Gauss-Seidel 迭代法计算. 在迭代过程中, 对所有的数值算例, 设置非线性迭代最大为 50 次, 线性迭代最大为 100 次, 对迭代初始值的选取没有进行任何特殊处理. 在下面算例 1 和 2 中, 扩散极限方程的求解使用了矩形网格上标准的五点格式.

**算例 1** (Marshak wave-2B) 取吸收/发射系数为  $\sigma = \frac{100}{T^3}$  cm<sup>2</sup>/g, 比热为 0.1 GJ/g/keV, 密度为 3.0 g/cm<sup>3</sup>. 初始的物质温度  $T$  为 10<sup>-6</sup> keV. 计算的空间区域为 [0 cm, 1 cm] × [0 cm, 0.01 cm]. 左边界条件为 Planck 分布为 1 keV 的各向同性的入射边界条件. 右边界为真空边界条件, 上、下边界为反射边界条件.

我们将分别用建立的基于  $S_N$ 、角度 FE 和 PFPN 的 UGKS 对该问题进行数值模拟. 在所有的模拟中, 取空间网格为 200 × 1, 时间步长由 CFL = 0.7 确定. 特别地, 对于  $S_N$ , 取  $N = 6$ ; 对于角度 FEM (finite element method) 的 4 个子区域  $\bar{S}_m^2$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), 均进行如图 1(a) 所示的 2 × 2 的均匀网格剖分; 对于 PFPN, 取  $N = 3$ ,  $\sigma_f = 0$ , 即此时 FPN 方法回到  $P_N$  方法.



图 2(a) 给出了  $t = 15, 30, 45, 60, 74$  ns 时所建立的 3 种计算格式得到的辐射波头的传播位置, 而图 2(b) 给出了在 74 ns 时分别采用 3 种灰体辐射输运计算格式和平衡扩散近似方程计算的物质温度对比. 从图 2 可以看出, 所建立的 3 种格式所得到的结果是一致的. 对这种强吸收的光性厚情形, 3 种格式的计算结果均收敛到扩散极限方程计算的结果, 这也说明了格式的渐近保持性.

**算例 2 (Marshak wave-2A)** 与上面算例 Marshak wave-2B 基本相同, 只是这里取  $\sigma = \frac{10}{T^3}$  cm<sup>2</sup>/g. 在本算例中, 同样用所建立的 3 种格式进行数值模拟, 空间网格、时间步长和角度离散也均与上面算例相同.

图 3(a) 是当  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  ns 时计算得到的辐射波头的传播位置, 图 3(b) 给出了 1.0 ns 时 3 种辐射输运格式得到的物质温度的计算结果, 且同样作为对比, 也列出了平衡扩散近似方程计算的结果. 从图 3 可以明显看出, 3 种格式的计算结果基本相同, 但对这种吸收系数不是很强的光性薄情形, 3 种格式的计算结果与扩散极限方程计算有显著的不同. 这也是与此种情形的物理特性相符的.

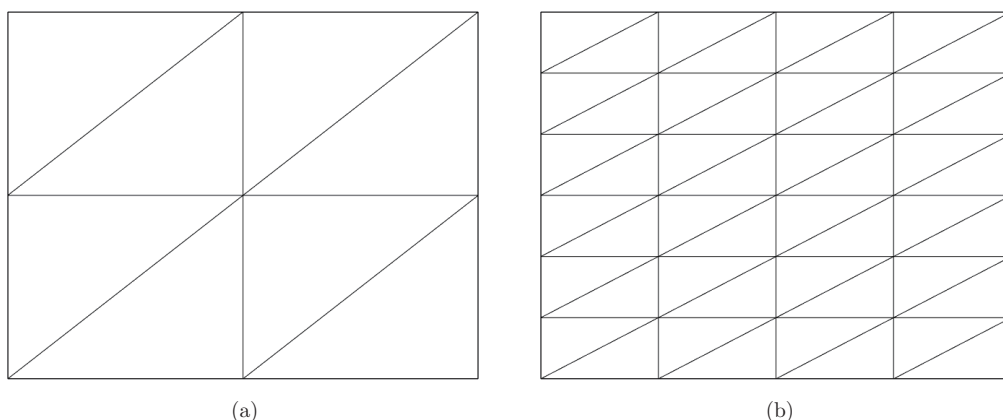


图 1 角度有限元: 角度区域  $\bar{S}_m^2$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) 的网格划分. (a) 角度方向的  $2 \times 2$  离散网格划分图; (b) 角度方向的  $4 \times 6$  离散网格划分图

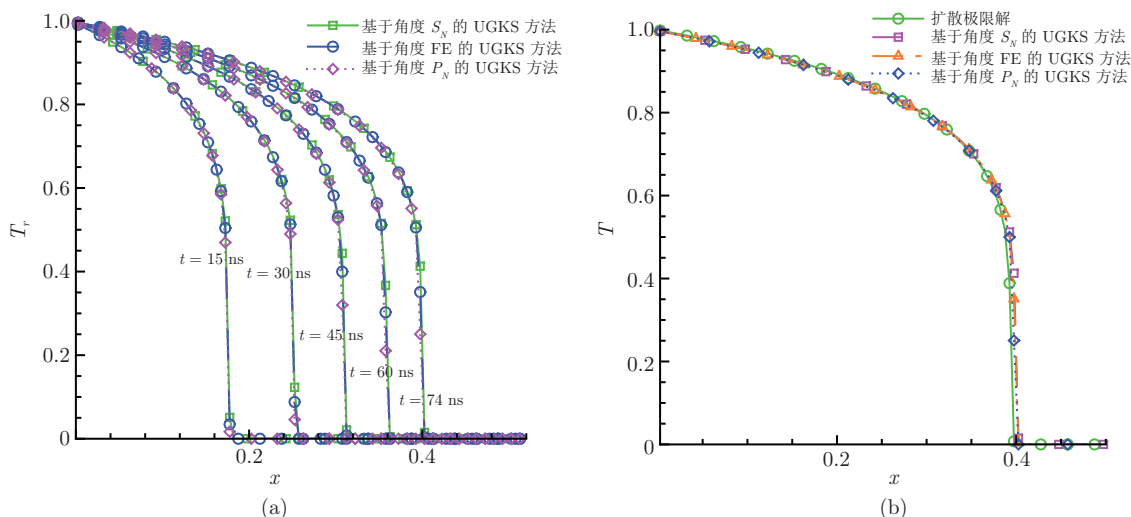


图 2 (网络版彩图) 算例 1: (a) 辐射温度  $T_r$  的数值结果; (b)  $t = 74$  ns 时物质温度  $T$  的数值结果以及扩散极限方程的解

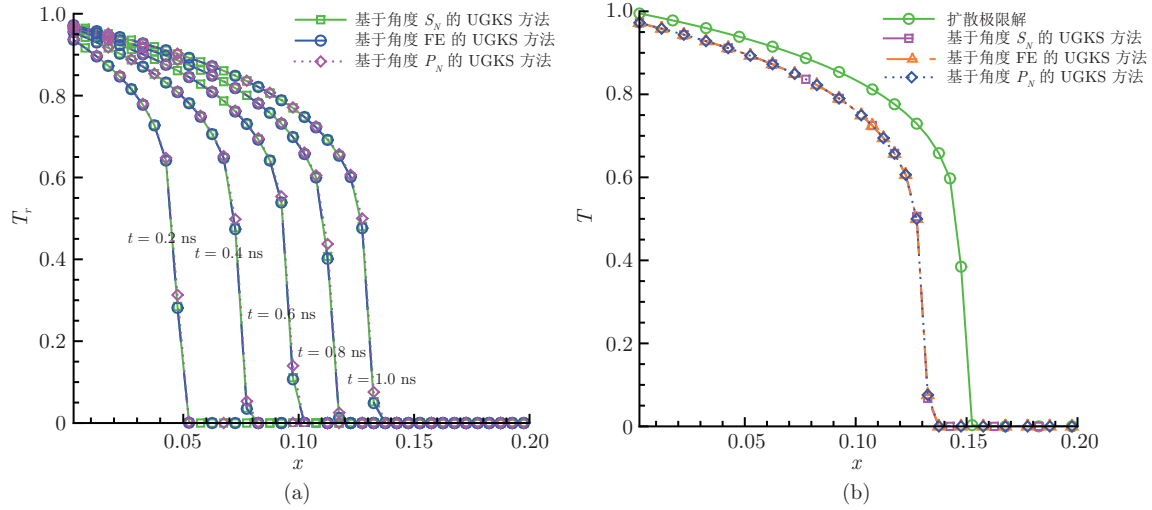


图 3 (网络版彩图) 算例 2: (a) 辐射温度  $T_r$  的数值结果; (b)  $t = 1$  ns 时物质温度  $T$  的数值结果和扩散极限方程的解

**算例 3** (Tophat test<sup>[5]</sup>) 这是一个二维平面坐标系上的算例. 计算区域为  $[0, 7] \times [-2, 2]$ , 其中稠密的光性厚介质具有密度  $10 \text{ g/cm}^3$ , 不透明度系数为  $\sigma = 2,000 \text{ cm}^{-1}$ , 位于如下的区域:  $(3, 4) \times (-1, 1)$ ,  $(0, 2.5) \times (-2, -0.5)$ ,  $(0, 2.5) \times (0.5, 2)$ ,  $(4.5, 7) \times (-2, -0.5)$ ,  $(4.5, 7) \times (0.5, 2)$ ,  $(2.5, 4.5) \times (-2, -1.5)$ ,  $(2.5, 4.5) \times (1.5, 2.0)$ . 其余的管形区域中, 填充密度为  $0.01 \text{ g/cm}^3$  的光性薄介质, 其不透明度系数为  $\sigma = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ . 物质的比热容系数为  $0.1 \text{ GJ/g/keV}$ . 初始时刻, 各区域中物质的温度为  $0.05 \text{ keV}$ , 并且辐射温度与物质温度达到平衡. 一个具有固定温度  $0.5 \text{ keV}$  的辐射热源位于区域左边界  $-0.5 < y < 0.5$  上, 其余边界为出流边界. 在 5 个点  $(x = 0.25, y = 0)$ 、 $(x = 2.75, y = 0)$ 、 $(x = 3.5, y = 1.25)$ 、 $(x = 4.25, y = 0)$  和  $(x = 6.75, y = 0)$  设置了观测点, 记录光性薄介质区中辐射温度与物质温度随时间的变化过程. 图 4 和 5 给出物质温度与辐射温度分别在网格  $128 \times 64$  和  $256 \times 128$  下的等值线图. 与文献 [5] 中的计算结果相比, UGKS 方法计算得到的光性薄与光性厚界面更锐利一些. 图 6 给出 5 个观测点上物质温度与辐射温度随时间变化的过程. 特别地, 对第 5 个观测点, 由于出流边界条件, 温度首先下降, 但随着辐射源的传播而上升. 这与文献 [5] 中观察到的现象一致.

**算例 4** (辐射激波解) 此算例利用多尺度辐射流体力学的渐近保持 UGKS 模拟两个辐射激波问题, 问题的描述参见文献 [42, 43]. 对这两个辐射激波问题, 考虑单原子气体, 绝热指数  $\gamma = 5/3$ , 比热容系数  $c_v = 0.14472799784454 \text{ JK keV}^{-1} \text{ g}^{-1}$  ( $1 \text{ JK} = 10^9 \text{ J}$ ), 总吸收系数  $\sigma_t = 577.35 \text{ cm}^{-1}$ , 散射系数  $\sigma_s = 0$ . 对 Mach 1.2 和 Mach 3 的波前和波后状态分别见表 1 和 2. 初始条件是左半区域用波前值, 而右半区域用波后值. CFL 条件数为 0.6, 两个算例都分别采用 500 和 1,000 个计算网格, 直到计算到稳态解. 对强激波情形, 物质温度在波后达到最大值, 这个极值点称为 Zel'dovich 尖. 利用 ThinkPad X250 笔记本电脑 (Intel Core i7-5600U, 8 GB RAM) 对下面两个辐射激波问题进行模拟.

**算例 5** (线源问题<sup>[44]</sup>) 考虑辐射温度与物质温度相同的情形, 此时方程 (2.1) 退化为如下的线性辐射运输方程:

$$\frac{\epsilon^2}{c} \partial_t I + \epsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I = \sigma \left( \frac{1}{4\pi} \rho - I \right). \quad (5.1)$$

在该算例中, 取  $\sigma = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $c = 1$ , 计算的空间区域为  $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ . 所有的边界条件均为真空边界条件, 初始条件为  $I(x, y, \boldsymbol{\Omega}, 0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2\pi\beta^2} e^{-\frac{R^2}{2\beta^2}} \right)$ , 其中  $\beta = 0.03$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

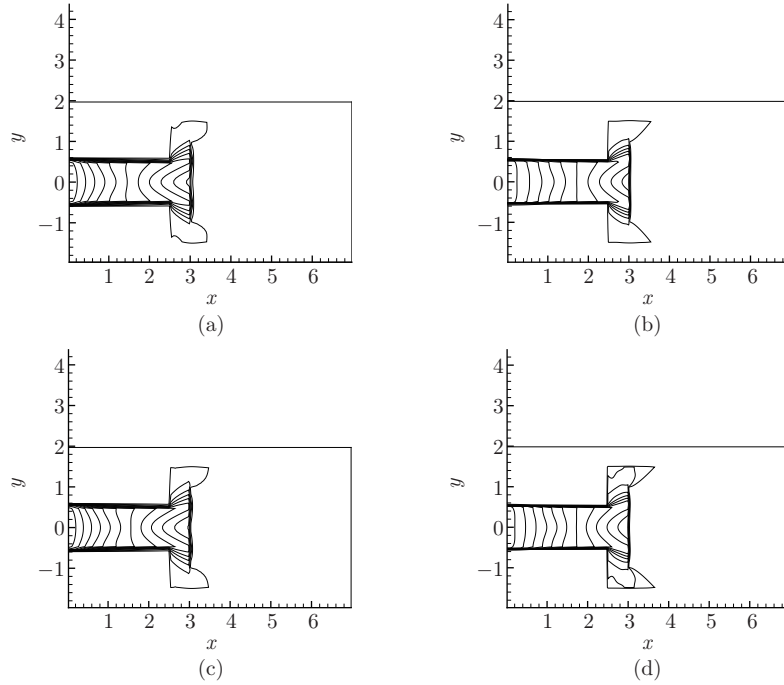


图 4 算例 3: 物质温度与辐射温度在 8 ns 时刻的等值线图, 温度的单位为 0.5 keV. (a) 和 (c) 分别为计算网格  $128 \times 64$  下的物质温度和辐射温度; (b) 和 (d) 分别为计算网格  $256 \times 128$  下的物质温度和辐射温度. 对物质温度, 从 0.11 到 0.99 均匀取 17 条等值线; 而对辐射温度, 从 0.13 到 0.93 同样取 17 条等值线

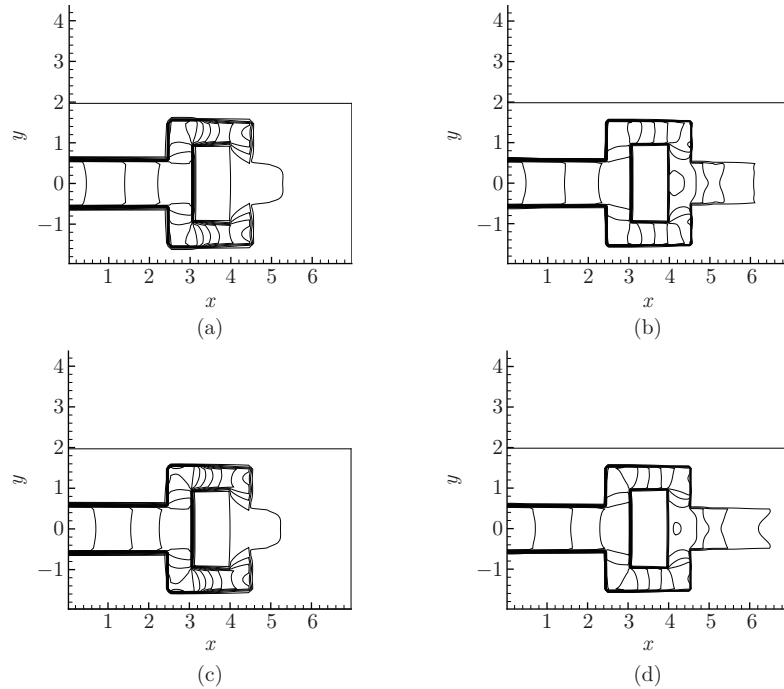


图 5 算例 3: 物质温度与辐射温度在 94 ns 时刻的等值线图, 温度的单位是 0.5 keV. (a) 和 (c) 分别为计算网格  $128 \times 64$  下的物质温度和辐射温度; (b) 和 (d) 分别为计算网格  $256 \times 128$  下的物质温度和辐射温度. 对物质温度, 从 0.11 到 0.99 均匀取 17 条等值线; 而对辐射温度, 从 0.12 到 0.92 同样取 17 条等值线

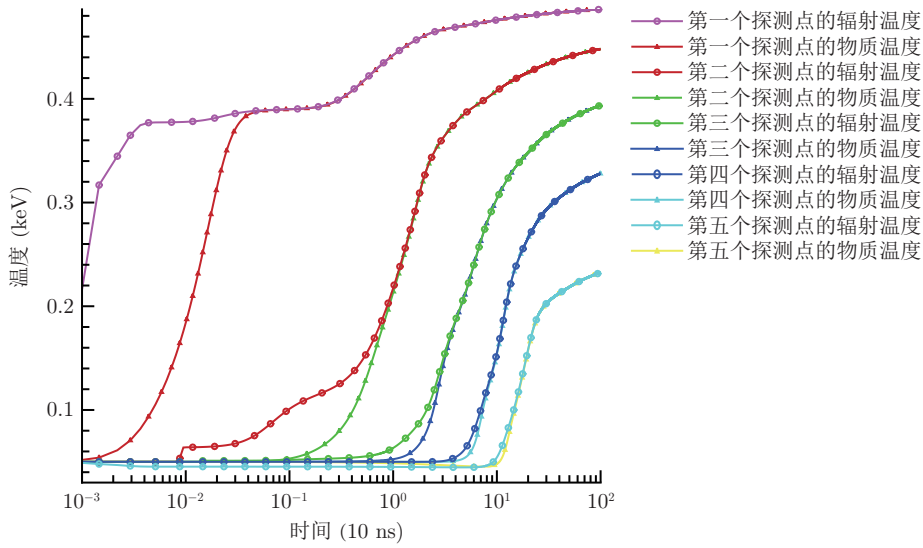


图 6 (网络版彩图) 算例 3: 5 个观测点上物质温度与辐射温度随时间变化图

本算例用以考察所建立的角度有限元离散和  $PPFP_N$  角度离散在消除  $S_N$  方法的射线效应方面的作用. 在所有的计算中, 空间网格都取为  $300 \times 300$ , 时间步长由  $CFL = 0.4$  确定. 对于角度有限元离散, 对 4 个角度子区域  $\bar{S}_m^2$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) 都进行如图 1(b) 所示的  $4 \times 6$  的均匀网格剖分. 整个角度区域总的角度自由度为 140; 对于  $PPFP_N$  角度离散, 取  $N = 11$ , 过滤函数使用球谐样条函数  $f_{SSpline}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2}$ , 参数取为  $\sigma_f = 80$ . 图 7 列出辐射能量  $\rho$  的计算结果, 以及计算结果沿非负的  $x$  轴和直线  $y = x$  的截图. 为对比, 图中也列出了文献 [44] 中的解析解以及用  $S_{16}$  和  $P_{11}$  模拟的结果.

由图 7 可知,  $S_{16}$  解出现了严重的射线效应, 与其角度自由度相当的 FEM( $4 \times 6$ ) 解极大地减弱了射线效应, 但对这种强的角度依赖性的问题, FE 解的射线效应仍然存在. 另外,  $P_{11}$  解振荡得很厉害, 且还使得  $\rho$  出现负值. 而利用格式  $PPFP_{11}$  计算得到的结果基本上没有振荡, 且是保正的. 这说明了该格式起到了很好的抑制振荡和保正的作用. 另外, 从图中注意到  $P_{11}$  解和  $PPFP_{11}$  解并不是完全旋转不变的. 这可能受到了空间和时间离散以及依赖于轴的角度限制器的影响.

表 1 Mach 1.2 辐射激波问题的初始条件

参数	波前状态	波后状态	单位
$\rho$	1.00000000E+00	1.29731782E+00	$\text{g cm}^{-3}$
$u$	1.52172533E-01	1.17297805E-01	$\text{cm sh}^{-1}$
$T$	1.00000000E-01	1.19475741E-01	keV
$E_r$	1.37201720E-06	2.79562228E-06	$\text{JK cm}^{-3}$

表 2 Mach 3 辐射激波问题的初始条件

参数	波前状态	波后状态	单位
$\rho$	1.00000000E+00	3.00185103E+00	$\text{g cm}^{-3}$
$u$	3.80431331E-01	1.26732249E-01	$\text{cm sh}^{-1}$
$T$	1.00000000E-01	3.66260705E-01	keV
$E_r$	1.37201720E-06	2.46899872E-04	$\text{JK cm}^{-3}$

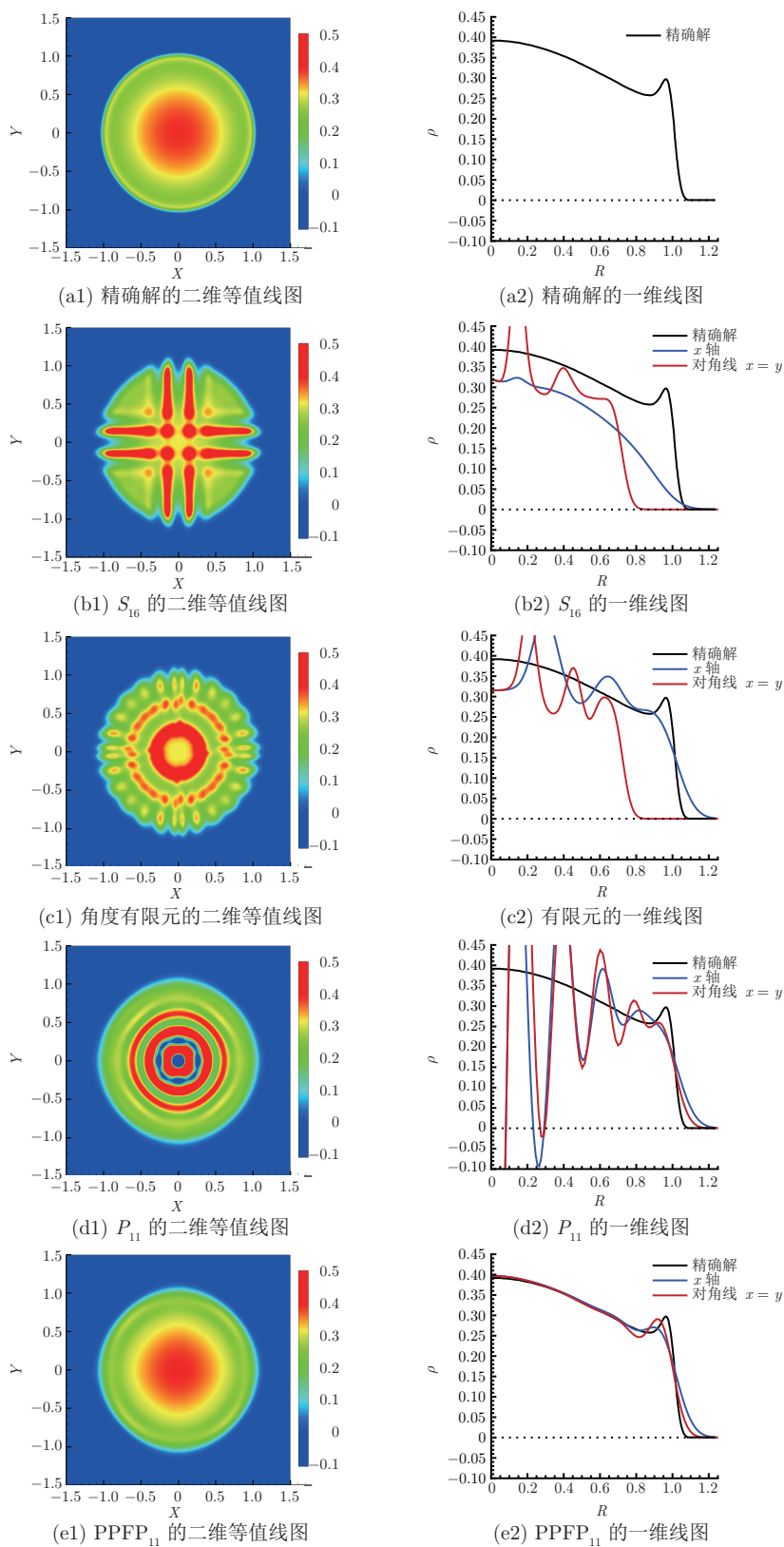


图 7 (网络版彩图) 算例 5:  $t = 1$  时刻  $\rho$  的数值结果

**情形 1** (Mach 1.2 激波) 对 Mach 1.2 的弱辐射激波, 数值计算结果见图 8. 能观察到流体激波没有明显的 Zel'dovich 尖<sup>[43]</sup>. 从数值结果中可以看出, 由于流体激波的存在, 流体温度不连续, 但温度值由波前和波后的值界定. 这与文献 [42, 43] 中的结果一致. 该算例的总计算时间为 61 min, 共计算了

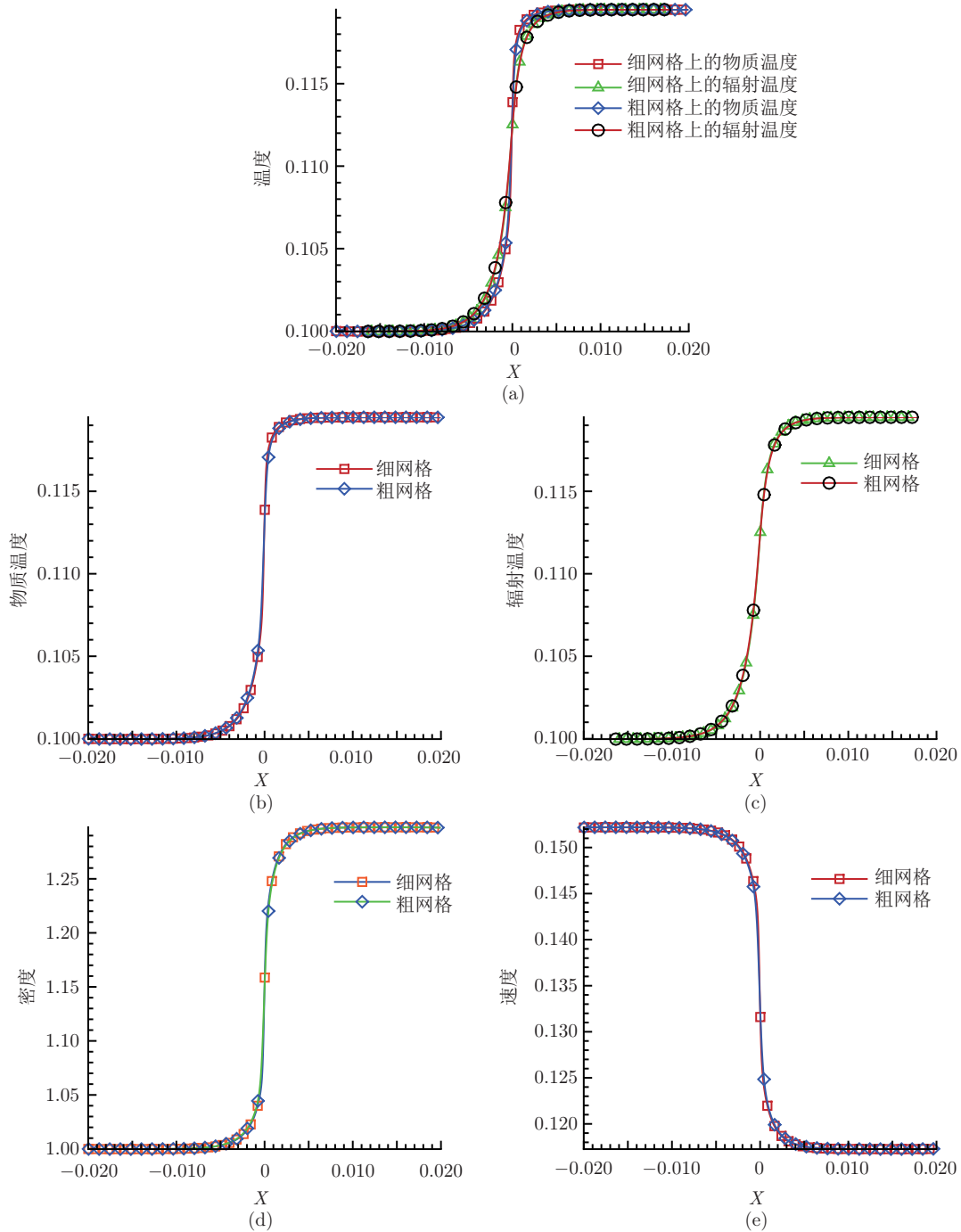


图 8 (网络版彩图) 算例 4 中的情形 1: Mach 1.2 辐射激波的计算结果. (a) 辐射温度与物质温度在粗细网格上的对比图; (b) 物质温度在粗细网格上的对比图; (c) 辐射温度在粗细网格上的对比图; (d) 物质密度在粗细网格上的对比图; (e) 流体速度在粗细网格上的对比图

5,000 个时间步达到稳态解.

**情形 2** (Mach 3 激波) 对 Mach 3 的强辐射激波, 数值计算结果见图 9. 从图中看出, 可同时观察到流体激波和 Zel'dovich 尖. 对流体激波, 流体密度和流体温度不连续. 随着流体激波处流体温度的升

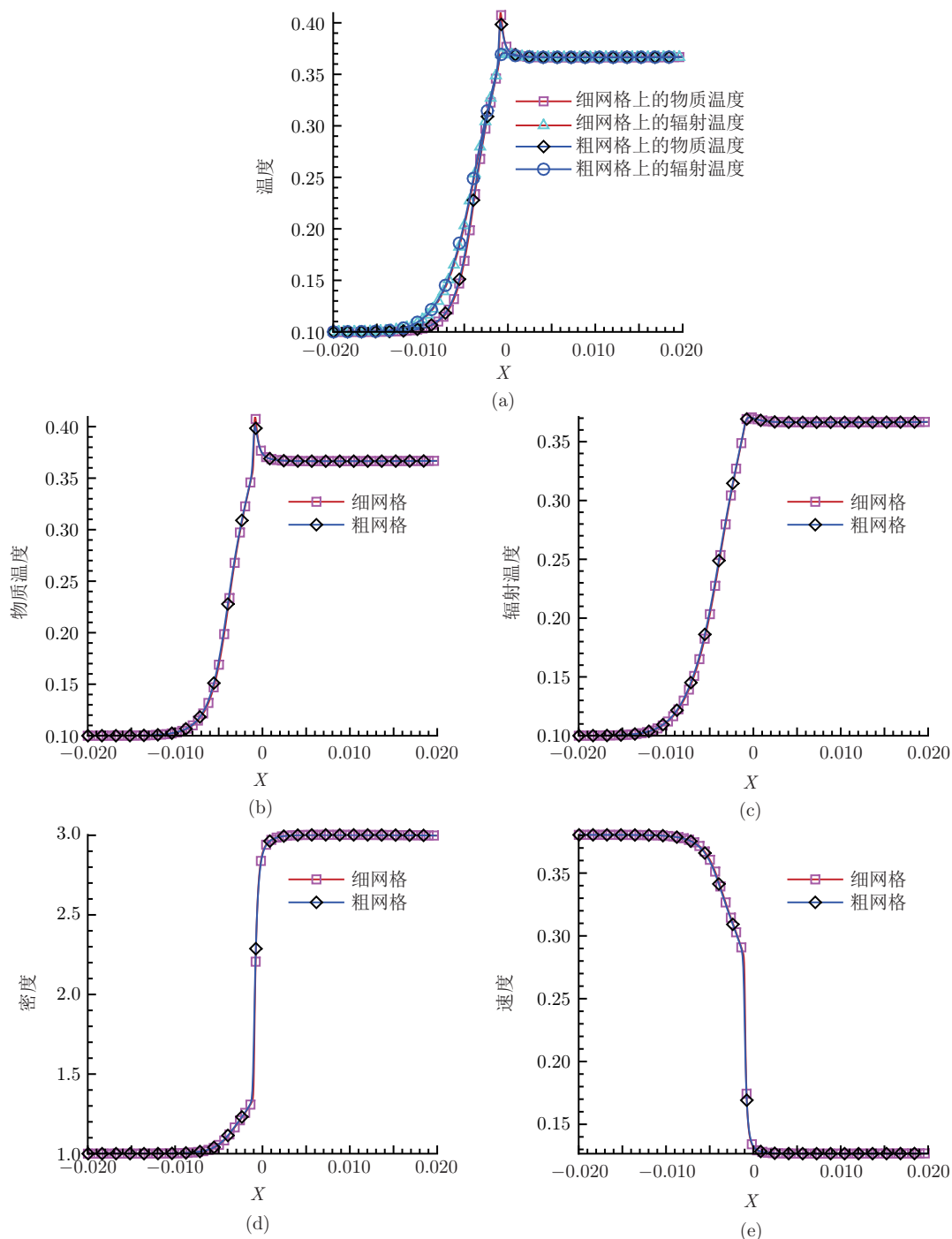


图 9 (网络版彩图) 算例 4 中的情形 2: Mach 3 的辐射激波的计算结果. (a) 辐射温度与物质温度在粗细网格上的对比图; (b) 物质温度在粗细网格上的对比图; (c) 辐射温度在粗细网格上的对比图; (d) 物质密度在粗细网格上的对比图; (e) 流体速度在粗细网格上的对比图

高, 出现 Zel'dovich 尖, 导致在激波下游附近有一个松弛区域. 经过这个松弛区, 辐射温度和物质温度达到平衡. 这与文献 [42, 43] 中的结果一致. 该算例的总计算时间为 237 min, 共计算了  $10^4$  个时间步达到稳态解.

## 6 结论

本文简要地介绍了近几年在辐射输运方程渐近保持 UGKS 研究方面的进展. 从简单但具有坚实物理意义的灰体辐射输运方程出发, 详细介绍了 UGKS 的构造过程, 并给出格式渐近保持性质的形式证明. 此外, 为减弱或去除离散纵标方法中的射线效应问题, 结合角度有限元和球谐函数展开方法, 并利用灰体辐射输运方程中的渐近保持的 UGKS 的通量构造方法, 设计了新的渐近保持格式. 最后, 把所设计的渐近保持 UGKS 推广应用到更为复杂的辐射输运方程组 (包括辐射流体力学方程组) 中, 建立了相应的渐近保持/保正格式. 数值算例的结果表明了该类格式在光性厚介质区能够很好地计算出相应的扩散极限方程的解, 在光性薄介质区给出自由输运方程的解, 而在过渡区实现自然过渡. 未来将结合多介质流体力学方法, 发展辐射流体力学的多介质渐近保持数值计算格式, 以及粒子与波相结合的 UGKS 方法, 解决惯性约束聚变等工程应用中的问题.

致谢 感谢审稿人对本文提出的建议和意见.

## 参考文献

- 1 Adams M L, Larsen E W. Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations. *Prog Nucl Energy*, 2002, 40: 3–159
- 2 Adams M L, Nowak P F. Asymptotic analysis of a computational method for time- and frequency-dependent radiative transfer. *J Comput Phys*, 1998, 146: 366–403
- 3 Chang B. The incorporation of the semi-implicit linear equations into Newton's method to solve radiation transfer equations. *J Comput Phys*, 2007, 226: 852–878
- 4 Densmore J D, Thompson K G, Urbatsch T J. A hybrid transport-diffusion Monte Carlo method for frequency-dependent radiative-transfer simulations. *J Comput Phys*, 2012, 231: 6924–6934
- 5 Gentile N A. Implicit Monte Carlo diffusion—an acceleration method for Monte Carlo time-dependent radiative transfer simulations. *J Comput Phys*, 2001, 172: 543–571
- 6 Howell J R, Siegel R, Menguc M P. *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5th ed. Boca Raton: CRC Press, 2011
- 7 Larsen E W. A grey transport acceleration method for time-dependent radiative transfer problems. *J Comput Phys*, 1988, 78: 459–480
- 8 Larsen E W, Morel J E. Asymptotic solutions of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes, II. *J Comput Phys*, 1989, 83: 212–236
- 9 Larsen E W, Morel J E, Miller Jr W F. Asymptotic solutions of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes. *J Comput Phys*, 1987, 69: 283–324
- 10 Larsen E W, Pomraning G C, Badham V C. Asymptotic analysis of radiative transfer problems. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, 1983, 29: 285–310
- 11 Sun W J, Jiang S, Xu K. An asymptotic preserving unified gas kinetic scheme for gray radiative transfer equations. *J Comput Phys*, 2015, 285: 265–279
- 12 Sun W J, Jiang S, Xu K, et al. An asymptotic preserving unified gas kinetic scheme for frequency-dependent radiative transfer equations. *J Comput Phys*, 2015, 302: 222–238
- 13 Degond P, Jin S. A smooth transition model between kinetic and diffusion equations. *SIAM J Numer Anal*, 2005, 42: 2671–2687
- 14 Degond P, Jin S, Mieussens L. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations. *J Comput Phys*, 2005, 209: 665–694
- 15 Jin S, Levermore D. The discrete-ordinate method in diffusive regimes. *Transport Theory Statist Phys*, 1991, 20: 413–439



- 16 Jin S, Levermore C D. Fully-discrete numerical transfer in diffusive regimes. *Transport Theory Statist Phys*, 1993, 22: 739–791
- 17 Jin S, Pareschi L, Toscani G. Uniformly accurate diffusive relaxation schemes for multiscale transport equations. *SIAM J Numer Anal*, 2000, 38: 913–936
- 18 Klar A. An asymptotic-induced scheme for nonstationary transport equations in the diffusive limit. *SIAM J Numer Anal*, 1998, 35: 1073–1094
- 19 Klar A, Schmeiser C. Numerical passage from radiative heat transfer to nonlinear diffusion models. *Math Models Methods Appl Sci*, 2001, 11: 749–767
- 20 Densmore J D, Larsen E W. Asymptotic equilibrium diffusion analysis of time-dependent Monte Carlo methods for grey radiative transfer. *J Comput Phys*, 2004, 199: 175–204
- 21 Morel J E, Wareing T A, Smith K. A linear-discontinuous spatial differencing scheme for  $S_n$  radiative transfer calculations. *J Comput Phys*, 1996, 128: 445–462
- 22 Smedley-Stevenson R P, McClarren R G. Asymptotic diffusion limit of cell temperature discretisation schemes for thermal radiation transport. *J Comput Phys*, 2015, 286: 214–235
- 23 Xu K, Huang J C. A unified gas-kinetic scheme for continuum and rarefied flows. *J Comput Phys*, 2010, 229: 7747–7764
- 24 Chen S Z, Xu K, Lee C B, et al. A unified gas kinetic scheme with moving mesh and velocity space adaptation. *J Comput Phys*, 2012, 231: 6643–6664
- 25 Chen S Z, Xu K. A comparative study of an asymptotic preserving scheme and unified gas-kinetic scheme in continuum flow limit. *J Comput Phys*, 2015, 288: 52–65
- 26 Huang J C, Xu K, Yu P B. A unified gas-kinetic scheme for continuum and rarefied flows II: Multi-dimensional cases. *Commun Comput Phys*, 2012, 12: 662–690
- 27 Mieussens L. On the asymptotic preserving property of the unified gas kinetic scheme for the diffusion limit of linear kinetic models. *J Comput Phys*, 2013, 253: 138–156
- 28 Sun W J, Jiang S, Xu K. A multidimensional unified gas-kinetic scheme for radiative transfer equations on unstructured mesh. *J Comput Phys*, 2017, 351: 455–472
- 29 Sun W J, Jiang S, Xu K. Multiscale radiative transfer in cylindrical coordinates. *Commun Appl Math Comput*, 2019, 1: 117–139
- 30 Sun W J, Jiang S, Xu K. An implicit unified gas kinetic scheme for radiative transfer with equilibrium and non-equilibrium diffusive limits. *Commun Comput Phys*, 2017, 22: 889–912
- 31 Sun W J, Jiang S, Xu K. An asymptotic preserving implicit unified gas kinetic scheme for frequency-dependent radiative transfer equations. *Int J Numer Anal Model*, 2018, 15: 134–153
- 32 McClarren R G, Hauck C D. Simulating radiative transfer with filtered spherical harmonics. *Phys Lett A*, 2010, 374: 2290–2296
- 33 McClarren R G, Hauck C D. Robust and accurate filtered spherical harmonics expansions for radiative transfer. *J Comput Phys*, 2010, 229: 5597–5614
- 34 Radice D, Abdikamalov E, Rezzolla L, et al. A new spherical harmonics scheme for multi-dimensional radiation transport I: Static matter configurations. *J Comput Phys*, 2013, 242: 648–669
- 35 Xu X J, Sun W J, Jiang S. An asymptotic preserving angular finite element based unified gas kinetic scheme for gray radiative transfer equations. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, 2020, 243: 106808
- 36 Du S H, Zhang S F, Feng T G, et al. *The Computer Simulation for Transport Problems (in Chinese)*. Changsha: Hunan Science & Technology Press, 1989 [杜书华, 张树发, 冯庭桂, 等. 输运问题的计算机模拟. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989]
- 37 van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J Comput Phys*, 1979, 32: 101–136
- 38 Laboure V M, McClarren R G, Hauck C D. Implicit filtered  $P_N$  for high-energy density thermal radiation transport using discontinuous Galerkin finite elements. *J Comput Phys*, 2016, 321: 624–643
- 39 Dargaville S, Buchan A G, Smedley-Stevenson R P, et al. Angular adaptivity with spherical harmonics for Boltzmann transport. *J Comput Phys*, 2019, 397: 108846
- 40 Frank M, Hauck C, Küpper K. Convergence of filtered spherical harmonic equations for radiation transport. *Commun Math Sci*, 2016, 14: 1443–1465
- 41 Xu K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method. *J Comput Phys*, 2001, 171: 289–335
- 42 Bolding S, Hansel J, Edwards J D, et al. Second-order discretization in space and time for radiation-hydrodynamics. *J Comput Phys*, 2017, 338: 511–526
- 43 Lowrie R B, Edwards J D. Radiative shock solutions with grey nonequilibrium diffusion. *Shock Waves*, 2008, 18:

129–143

- 44 Garrett C K, Hauck C D. A comparison of moment closures for linear kinetic transport equations: The line source benchmark. *Transport Theory Statist Phys*, 2013, 42: 203–235

## Unified gas kinetic schemes for the radiation transfer equations

Song Jiang, Kun Xu, Wenjun Sun & Xiaojing Xu

**Abstract** The equations of radiation transfer have played an important role in the fields such as astrophysics and inertial confinement fusion. For practical radiative transfer problems, the properties of the background material greatly influence the behavior of radiation transfer. For a low opacity material (small opacity coefficient), the interaction between the radiation and material is weak, and the radiation propagates in a transparent way. However, for a high opacity material (large opacity coefficient), there is severe interaction between radiation and material with a diminishing photon mean free path. As a result, the diffusive radiative behavior will emerge. It is an active topic now in the numerical solution of radiation transfer equations to construct a numerical scheme which can not only obtain the transport behavior but also capture the diffusion behavior. In this paper, we mainly review the recent progress in the extension of the unified gas kinetic scheme (UGKS) to radiative transfer problems. Based on the example of the grey radiation transfer equations, we give the details of the construction of the UGKS and the asymptotic analysis. At the same time, combining the UGKS with the finite element and sphere harmonic expansion methods for the angular variable, we describe some techniques on how to reduce/eliminate the ray effect which is an inherent shortcoming in the discrete ordinate method. Furthermore, we extend this asymptotic preserving UGKS to the equations of radiation hydrodynamics. Finally, numerical examples are presented to show the asymptotic and positive preserving properties of the proposed schemes.

**Keywords** radiation transfer equations, asymptotic preserving, positive preserving, unified gas kinetic scheme, equations of radiation hydrodynamics

**MSC(2020)** 65M08, 65Q10, 65Z99

**doi:** 10.1360/SSM-2020-0278