

现代数学译丛 20

# 金融衍生产品的数学模型

郭宇权 (Yue-Kuen Kwok) 著

张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

科学出版社

北京

图字：01-2010-2338 号

## 内 容 简 介

本书是一本关于利用金融工程方法对衍生产品建立模型的理论教科书，主要内容是关于大多数衍生证券都共同适用的鞅定价原理。仔细分析通常在公平和有固定收益市场交易的金融衍生产品所涉及的广泛内容，主要集中在定价、对冲及其风险管理等几个方面。从著名的 Black-Scholes-Merton 期权定价模型开始，读者通过本书可以看到关于最丰富的衍生产品定价模型和利率模型的新进展。书中重点介绍了求解不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法。

第二版对第一版进行了大量的修订。在离散时间的框架内，通过对基本金融经济学原理的分析，使连续时间鞅定价理论变得更生动。书中给出了大量的新型权益和有固定收益的衍生证券的闭式定价公式。在每章的后面通过习题的方式把许多最近的研究成果和方法呈现给读者。

郭宇权是香港科技大学的数学教授。他发表了 80 多篇学术论文，出版了几本专著，包括《应用复变函数论》。同时，他是学术杂志《经济动力学和控制》和《亚太金融市场》的副主编。

### 图书在版编目(CIP)数据

金融衍生产品的数学模型/郭宇权著；张寄洲等译。—北京：科学出版社，2012

(现代数学译丛)

ISBN 978-7-03-033705-4

I. ①金… II. ①郭… ②张… III. ①金融衍生产品-数学模型-研究  
IV. ①F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 037047 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：钟 洋  
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

**中国科学院印刷厂** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2012 年 4 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2012 年 4 月第一次印刷 印张：31 3/4

字数：616 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

## 中文版前言

随着金融市场日益趋向全球化,金融衍生工具产品在中国金融市场上的使用将有长足的发展.通过对衍生工具定价模型的叙述和对各类衍生产品的使用,以及相关风险对冲手段的介绍,相信本书能为中国的金融数学专业的学生以及金融衍生工具业界人士提供最前沿的知识.在此,特别衷心感谢张寄洲教授、边保军教授和徐承龙教授的专业及辛勤的翻译工作,他们的译作可以帮助中文读者了解国际学术界在衍生工具定价理论方面的新发展.在翻译过程中,三位教授花了大量的精力,反复推敲在新型衍生工具方面最切合原意的中文专用名词,他们的译作水平达到“信达雅”的高度.个人专业著作能被翻译成另一语言来发表,作者自会感到无限的光荣.我个人的第一语言是中文,看到自己用第二语言写成的专著能够用第一语言来出版,其喜悦的心情是难以用笔墨来形容的.最后,感谢科学出版社对出版本书中文版的支持,也感谢在出版过程中相关编辑及工作人员的辛勤劳动.

郭宇权

2011年12月于香港科技大学

## 译者前言

早在 1900 年, 法国数学家巴歇里耶 (Bachelier) 就在他的博士论文“投机理论”中提出证券价格的变化可以看成是一个布朗 (Brownian) 运动, 并且这也是历史上第一次给出布朗运动的数学定义. 随后, 萨缪尔森 (Samuelson) 在 1965 年进一步提出了股票价格的变化遵循几何布朗运动. 从此, 几何布朗运动就成了经济学家描述股票价格变动所采用的最基本的模型. 特别是 20 世纪 50 年代以来, 金融经济学研究上的根本变化在于引进了数学方法, 从而诞生了一门新的交叉学科——金融数学. 因此, 金融数学最显著的特征就是有效地运用数学理论和方法, 发现和论证金融经济运行的一些规律.

金融数学的蓬勃发展曾引发了两次“华尔街革命”. 第一次“华尔街革命”是由 20 世纪 50 年代末、60 年代初马科维茨 (Markowitz) 的证券投资组合理论与夏普 (Sharpe) 的资本资产定价理论引发的, 他们共同开创了金融数学理论研究的先河. 第二次“华尔街革命”是指 1973 年布莱克和肖尔斯 (Black-Scholes) 期权定价理论的问世, 他们从证券价格的随机模型出发, 用几何布朗运动导出了著名的期权定价公式. 这一理论不仅在金融界, 而且在其他经济学领域中都有着广泛的应用, 从而为金融业的未来发展带来了一场革命性的变化.

Black-Scholes-Merton 定价模型和鞅定价理论是期权定价理论的基石. 由香港科技大学郭宇权 (Yue-Kuen Kwok) 教授撰写的 *Mathematical Models of Financial Derivatives* 一书, 是一本关于利用金融数学方法对衍生产品定价建立模型的优秀理论教科书. 书中主要内容是关于鞅定价原理、衍生产品定价模型、对冲及其风险管理等知识. 读者通过阅读该书, 可以了解关于衍生产品定价模型和利率模型的最新进展, 掌握和了解求不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法. 特别是在该书中每章的后面, 通过习题的方式, 把许多最新的研究成果和方法介绍给读者, 这是该书的一个重要特色.

能有机会将该书介绍给国内读者, 是让我们感到非常欣慰的事情. 该书可作为国内数学和金融等有关专业的高年级本科生和研究生的金融数学, 甚至金融工程课程的教材, 也可为金融从业人员提供有益的参考. 该书的翻译工作是由上海师范大学的张寄洲、同济大学的边保军和徐承龙合作完成的. 张寄洲负责协调全书的翻译工作, 并翻译了前言、目录、第 1~3 章, 第 4~6 章由边保军翻译, 第 7, 8 章由徐承龙翻译. 研究生孙伟、陆俊成、傅颖娜、袁泉、王乐乐、梁义娟、赵娜、杨巧敏等参与了该书各章的初译和打印工作. 王杨和傅毅还参与了第 1~3 章的校对工作. 对他

们的辛勤劳动在此表示万分感谢.

本书是应科学出版社之邀翻译的. 特别要感谢科学出版社编辑张扬先生和王丽平女士. 他们的支持和鼓励使得本书的翻译工作得以顺利完成. 译者同时非常感谢本书的作者郭宇权教授, 他不仅为本书写了前言, 而且亲自纠正了中文翻译中许多名词上的误译之处. 由于译者时间和水平所限, 书中难免有疏漏和翻译上的不妥之处, 敬请广大读者给予批评指正.

最后, 感谢国家重点基础研究发展计划子课题“信用风险分析和信用衍生产品定价”(2007CB814903) 以及国家自然科学基金项目“偏微分方程解的凸性研究和金融应用”(No.11071189) 和上海市本科教育高地建设项目“数学与应用数学”等项目的资助.

译者

2011年12月于上海

# 前 言

## 写作动机和读者对象

在过去的 30 年里, 我们目睹了金融市场中金融衍生产品和结构化产品的交易正在全球以惊人的速度增长, 掀起了衍生产品定价理论研究的高潮, 导致了在华尔街的金融机构大量雇用对金融衍生产品定价和管理投资组合风险具有能用高级分析和计算技巧, 以及能处理复杂而高深的科学现象等科学背景的毕业生. 现在在不同的国家里, 金融工程、数量金融学和计算金融学等学科拥有一百多个硕士学位项目. 本书是为了帮助攻读这些学位项目的学生掌握关于衍生产品定价理论而写的入门教材, 也适用于在金融机构从事计量工作, 并愿意获得期权定价技巧和探索新型结构衍生产品定价模型新进展的从业人员. 本书涉及的数学知识, 特别是对基本熟悉概率论和数理统计、微分方程、数值分析和数学分析的理工科高年级大学生的读者来说是适合的. 与鞅定价理论有关的随机过程的进一步知识, 如随机微积分和鞅理论, 在本书中也作了介绍.

衍生产品定价理论的基石是 Black-Scholes-Merton 定价模型和金融衍生产品的鞅定价理论. 在无套利的金融市场中, 根据贴现证券价格在风险中性测度下是鞅的性质, 著名的风险中性定价原理表明在该测度下衍生产品的价格是由最终收益的贴现期望值给出的. 第二版对第一版进行了大量的修订. 新版是在建立衍生产品模型后提出了理论, 重点突出了鞅定价原理. 在离散时间的框架内, 基本金融经济学原理的分析使连续时间鞅定价理论变得生动. 在公平和有固定收益市场中, 分析经常交易的金融衍生产品所涉及的广泛内容, 主要集中在定价、对冲以及风险管理等几个方面. 从著名的 Black-Scholes-Merton 期权定价模型开始, 读者通过本书可以看到关于最丰富的衍生产品定价模型和利率模型的新进展. 书中重点介绍了求解不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法, 收集了各种新型路径依赖期权(包括障碍期权、回望期权、亚式期权和美式期权) 以及有固定收益衍生产品的闭式定价公式.

## 各章导引

本书内容包括 8 章, 每章结尾都选用了大量精心设计的习题. 这些问题不仅使读者重温书中的概念和知识, 而且也使读者找到散落在最近的期刊文章中关于金融衍生产品定价理论的新研究成果和概念.

第 1 章是关于基本衍生工具的介绍, 如远期合约、期权和互换. 给出了在金融经济学中有关术语的各种定义, 如自融资策略、套利、对冲策略等. 关于标的资产价格动态在没有任何给定的假设下说明怎样推导出期权价格的合理边界.

第 2 章在离散证券模型下, 利用金融经济学的理论证明了无套利原理等价于等价鞅测度的存在性. 这个重要结果称为资产定价基本定理. 由此导出了风险中性定价原理, 在风险中性测度下, 可达未定权益的定价是由权益贴现的期望值决定的. 因此, 可达未定权益、无套利和风险中性等概念构成了现代期权定价理论的基石. 在随机分析中, 引入了布朗过程和基本分析工具. 特别地, 讨论了 Feynman-Kac 表示, 在两个概率测度之间的 Radon-Nikodym 导数和 In Itô 过程中使测度发生变换的 Girsanov 定理.

书中的亮点出现在第 3 章, 其中介绍了期权定价模型的 Black-Scholes-Merton 公式和金融衍生产品的鞅定价方法, 阐明了如何利用定价理论获得不同类型欧式期权的定价公式, 讨论了 Black-Scholes-Merton 模型的各种推广, 包括带交易费用的模型、跳扩散模型和随机波动率模型.

路径依赖期权是关于在期权的生存期间, 与资产价格过程的路径历史有关的收益结构的期权. 常见的例子是具有敲出特征的障碍期权、具有平均特征的亚式期权和收益依赖于资产价格过程实际极值的回望期权. 在第 4 章中, 假设标的资产价格服从几何布朗过程, 得到了各种类型欧式路径依赖期权的定价公式.

第 5 章是关于美式期权的定价. 提出了与美式期权模型有关的最佳实施边界的特征, 特别地, 分析了离散分红前后和即将到期前实施边界的特征, 讨论了美式期权的两个常用的定价公式, 即线性互补公式和最优停止公式, 证明了根据实施边界以积分表示的形式如何来表达提前实施期权金. 因为一般地, 对美式期权不能得到解析定价公式, 所以对美式期权的定价提出了几个解析近似方法, 也考虑了美式障碍期权、俄罗斯期权和重置敲定期权的定价模型.

因为有闭式定价公式的期权模型是稀少的, 所以对期权价格的定价通常借助于数值方法. 在期权定价中, 常用的数值方法是格点树方法、有限差分算法和蒙特卡罗模拟法. 从本质上来说, 格点树方法最初是通过随机游动模型对连续资产价格过程的模拟. 有限差分算法是寻求将 Black-Scholes 方程中的微分算子离散化. 蒙特卡罗模拟法是通过模拟资产价格的随机过程, 对期权定价问题提出了一个概率解法. 利用这些方法, 第 6 章给出了期权定价的算法.

第 7 章研究了各种利率模型和债券价格的特征. 以单因子短期利率模型为例开始讨论, 并将其扩展到多因子模型, 讨论了建立远期利率的随机运动模型的 Heath-Jarrow-Merton(HJM) 方法. HJM 方法提出了建立瞬时利率模型的共同方法. 也在 Gaussian HJM 框架下, 提出了远期 LIBOR(伦敦银行同业拆借利率 (London-interbank-offered-rate) ) 过程的公式.

最后一章提出了关于几个普通的可交易利率衍生产品定价模型的解释, 如债券期权、区间型债券、利率上限期权和互换期权. 在随机利率下, 为使股票衍生产品的定价更容易, 引入了远期测度的技巧. 在远期测度下, 债券价格被用来作为计价单位. 在 LIBOR 衍生产品类型的定价中, 用 LIBOR 作为定价模型中标的状态变量是更有效的. 对每个远期 LIBOR 过程, 对数正态 LIBOR 模型确定了一个由远期利率结算日定义的远期测度. 与基于不可观察的瞬时远期利率的 HJM 方法不同, 对数正态 LIBOR 模型是建立在可观察的市场利率的基础上的. 类似地, 在对数正态互换利率模型下, 能有效地给出互换期权的定价, 这里在适当的互换测度中用年金 (债券价格的和) 作为计价单位. 最后, 在适当的两个货币 LIBOR 模型下, 考虑对冲和交叉货币利率互换的定价.

### 致谢

在写作过程中, 作者得益于来自同事们和学生们通过各种类型的研讨班和课堂讨论的建议和意见. 书中所使用的某些材料出自曾与作者合作过的同事和已毕业的博士生在研究出版物中的一些新成果. 特别要感谢 Lixin Wu, Min Dai, Hong Yu, Hoi Ying Wong, Ka Wo Lau, Seng Yuen Leung, Chi Chiu Chu, Kwai Sun Leung 和 Jin Kong 等长期研究的相互影响, 以及他们关于本书手稿的一些有益的建议. 特别感谢黄美西女士对手稿仔细的打印和编辑工作, 以及她在本书的出版过程中对待无穷无尽的修改的耐心态度. 最后, 在本书写作过程中, 更多的要真诚地感谢我的妻子爱珍和我们的两个女儿懿恩和懿珊的宽容态度. 在每天的生活和工作中, 她们的爱护和关心永远是支撑我努力工作的源泉.

### 关于本书封面设计的后话

在这本由 Springer 出版的教材书的封面, 其普通黄色和蓝色的背景下面是香港的中银大厦和立法会大楼. 这个设计的意念是对得益于中国惊人的经济发展和香港健全的法制系统下所带来的香港金融市场近年来巨大成就的赞美.



# 目 录

中文版前言

译者前言

前言

第 1 章 衍生产品介绍	1
1.1 金融期权及其交易策略	1
1.1.1 关于期权的交易策略	5
1.2 期权价格的合理边界	9
1.2.1 分红的影响	15
1.2.2 看涨-看跌期权的平价关系	16
1.2.3 外汇期权	17
1.3 远期和期货合约	19
1.3.1 远期合约的价值和价格	19
1.3.2 远期和期货价格的关系	22
1.4 互换合约	23
1.4.1 利率互换	23
1.4.2 货币互换	25
1.5 习题	26
第 2 章 金融经济学和随机分析	31
2.1 单时段证券模型	32
2.1.1 占优交易策略和线性价格测度	32
2.1.2 套利机会与风险中性概率测度	38
2.1.3 未定权益的价值	44
2.1.4 二叉树期权定价模型的原理	48
2.2 域流、鞅和多时段模型	50
2.2.1 信息结构和域流	51
2.2.2 条件期望与鞅	53
2.2.3 停时和停止过程	57
2.2.4 多时段证券模型	59
2.2.5 多时段二叉树模型	64
2.3 资产价格运动和随机过程	67
2.3.1 随机游动模型	68

2.3.2	布朗过程	71
2.4	随机分析: Itô引理和 Girsanov 定理	73
2.4.1	随机积分	74
2.4.2	Itô引理和随机微分	77
2.4.3	Itô过程和 Feynman-Kac 表示公式	79
2.4.4	测度变换: Radon-Nikodym 导数和 Girsanov 定理	82
2.5	习题	83
<b>第 3 章</b>	<b>期权定价模型: Black-Scholes-Merton 公式</b>	<b>93</b>
3.1	Black-Scholes-Merton 公式	94
3.1.1	无风险对冲原理	95
3.1.2	动态复制策略	97
3.1.3	风险中性原理	100
3.2	鞅定价理论	101
3.2.1	等价鞅测度和风险中性定价	102
3.2.2	Black-Scholes 模型回顾	105
3.3	Black-Scholes 定价公式及其性质	107
3.3.1	欧式期权的定价公式	107
3.3.2	比较静态	114
3.4	推广的期权定价模型	119
3.4.1	分红资产的期权	120
3.4.2	期货期权	125
3.4.3	选择期权	127
3.4.4	复合期权	128
3.4.5	风险债务的 Merton 模型	131
3.4.6	交换期权	134
3.4.7	具有汇率风险敞口的股票期权	136
3.5	超出 Black-Scholes 定价框架	139
3.5.1	含交易费的期权定价模型	140
3.5.2	跳扩散模型	143
3.5.3	隐含和局部波动率	145
3.5.4	随机波动率模型	150
3.6	习题	155
<b>第 4 章</b>	<b>路径相关期权</b>	<b>171</b>
4.1	障碍期权	172
4.1.1	欧式下降敲出看涨期权	173

---

4.1.2	转移密度函数和首次通过时间密度	177
4.1.3	双边障碍期权	185
4.1.4	离散观察的障碍期权	190
4.2	回望期权	191
4.2.1	欧式固定敲定价格回望期权	192
4.2.2	欧式浮动敲定价格回望期权	194
4.2.3	其他新型欧式回望期权	197
4.2.4	偏微分方程模型	199
4.2.5	离散观察的回望期权	200
4.3	亚式期权	201
4.3.1	偏微分方程模型	202
4.3.2	连续观察的几何平均期权	203
4.3.3	连续观察的算术平均期权	206
4.3.4	看跌 - 看涨期权平价公式和固定 - 浮动敲定价格期权的对称关系	208
4.3.5	离散几何平均的固定敲定价格期权	211
4.3.6	离散算术平均的固定敲定价格期权	214
4.4	习题	219
<b>第 5 章</b>	<b>美式期权</b>	<b>238</b>
5.1	最佳实施边界的特性	239
5.1.1	原生产产分红的美式期权	240
5.1.2	平滑粘贴性条件	241
5.1.3	美式看涨期权的最佳实施边界	243
5.1.4	看涨 - 看跌期权的对称关系	246
5.1.5	原生产产单次分红的美式看涨期权	249
5.1.6	单次和多次分红的美式看跌期权	253
5.2	美式期权模型的定价公式	256
5.2.1	线性互补公式	256
5.2.2	最优停时问题	258
5.2.3	提前实施费用的积分表示	259
5.2.4	美式障碍期权	264
5.2.5	美式回望期权	266
5.3	解析近似方法	268
5.3.1	复合期权近似方法	268
5.3.2	积分方程的数值解	270
5.3.3	二次近似方法	272

5.4	具有自动重置权利的期权	274
5.4.1	叫底价特征的定价问题	275
5.4.2	可重置敲定价格的看跌期权	278
5.5	习题	282
<b>第 6 章</b>	<b>期权定价的数值方法</b>	<b>297</b>
6.1	网格树方法	298
6.1.1	二叉树模型的回顾	298
6.1.2	二叉树模型的连续极限	300
6.1.3	离散分红模型	303
6.1.4	提前实施特征和回购特征	305
6.1.5	三叉树模型	306
6.1.6	前向打靶法	310
6.2	有限差分算法	315
6.2.1	构造显示格式	316
6.2.2	隐式格式及实现问题	319
6.2.3	自由边界固定方法和点松弛技巧	322
6.2.4	截断误差和收敛的阶	326
6.2.5	数值稳定性和振荡现象	328
6.2.6	辅助条件的数值近似	331
6.3	蒙特卡罗模拟	334
6.3.1	方差减小技巧	336
6.3.2	低偏差序列	338
6.3.3	美式期权的定价	339
6.4	习题	348
<b>第 7 章</b>	<b>利率模型和债券定价</b>	<b>358</b>
7.1	债券价格与利率	359
7.1.1	债券价格与收益率曲线	359
7.1.2	远期利率合约、债券远期和标准互换	361
7.1.3	远期利率和短期利率	363
7.1.4	确定性利率下的债券价格	366
7.2	单因子短期利率模型	367
7.2.1	短期利率模型和债券价格	367
7.2.2	Vasicek 均值回归模型	372
7.2.3	Cox-Ingersoll-Ross 平方根扩散模型	373
7.2.4	推广的单因子短期利率模型	375

---

7.2.5 债券价格当前期限结构的校正 .....	376
7.3 多因子利率模型 .....	379
7.3.1 短期利率/长期利率模型 .....	379
7.3.2 随机波动率模型 .....	382
7.3.3 仿射期限结构模型 .....	383
7.4 Heath-Jarrow-Morton 框架结构 .....	387
7.4.1 远期利率的漂移率条件 .....	388
7.4.2 短期利率过程和它们的马尔可夫特性 .....	389
7.4.3 高斯型 HJM 框架结构下的远期 LIBOR 过程 .....	393
7.5 习题 .....	395
<b>第 8 章 利率衍生产品：债券期权、LIBOR 及互换产品 .....</b>	<b>415</b>
8.1 远期测度及远期价格 .....	416
8.1.1 远期测度 .....	417
8.1.2 随机利率下股票期权的定价 .....	419
8.1.3 期货和期货 - 远期价差 .....	421
8.2 债券期权及区间型债券 .....	423
8.2.1 贴现债券期权及付息债券期权 .....	423
8.2.2 区间型债券 .....	430
8.3 上限和 LIBOR 市场模型 .....	433
8.3.1 高斯 HJM 框架下的上限定价 .....	433
8.3.2 Black 公式和 LIBOR 市场模型 .....	435
8.4 互换和互换期权 .....	440
8.4.1 远期互换利率和互换测度 .....	441
8.4.2 对数正态 LIBOR 市场模型下互换期权的近似定价 .....	445
8.4.3 交叉货币互换 .....	449
8.5 习题 .....	457
参考文献 .....	475
《现代数学译丛》已出版书目 .....	488